土木学会第43回年次学術講演会（昭和63年10月）

III-416　オイラー・ラグランジェ手法に関する一考察

間組　小林晃

1．はじめに

オイラー・ラグランジェ手法はノイマンによって，1981年に提案された物質の移流拡散の問題の一解法である．物質の移流拡散問題を解く際，流速が速い場合あるいは拡散係数が小さい場合には解が振動し，方程式が満足に解けないと言う問題が生じる．オイラー・ラグランジェ手法はその様な問題を回避する現在最も有効な手法であると思われるが，この手法を実際に適用するにはいくつかの問題点がある．それは，境界と法線方向の流速が無い場合のフラックスとしての境界条件の扱い方に不明な点がある．またこの手法では，クーラン数が大きくなると解が真の値に近ずくことが，既に筆者によって検討されているが，メッシュの切り方によって，かなり解が異なってくることである．

本論では，以上の点について，若干の検討を行ったのでその結果を報告する．

2．境界条件の表現方法

オイラー・ラグランジェ手法は移流拡散方程式を移流と拡散に分けて考える手法である．

ノイマンは境界条件をまとめて次のように書き，

$$-D(\partial C/\partial x)+vC+\alpha(C-C_0) = q \qquad (1)$$

これを移流に関する場合と拡散に関する場合に，次のように分けて扱う．

$$v\bar{C}+\alpha(\bar{C}-C_0) = q \quad \text{for convection} \qquad (2) \qquad -D(\partial C/\partial x)+v\mathring{C}+\alpha\mathring{C}=0 \quad \text{for dispersion} \qquad (3)$$

一般の解析では，$q=v_nC$とおかれる場合が多く，ノイマンの考えも同様である．しかし，これでは$v_n=0$の場合のフラックス境界は扱えない．

境界条件を$q=dC/dx$として扱い，これをオイラー・ラグランジェ手法を用いて解くためには，フラックスで与えられる境界条件を

$$q= v_nC \qquad (4.a) \qquad\qquad q = -D(\partial C/\partial x) \qquad (4.b)$$

の二種類に分けて考えることが必要になる．（普通の移流拡散解析ではqとして区別なく扱うことができる．）

(4.b)式の場合には，(2),(3)式の代わりに次のように考える．

$$v\bar{C}+\alpha(\bar{C}-C_0) = 0 \quad \text{for convection} \qquad (5.a) \qquad -D(\partial C/\partial x)+v\mathring{C}+\alpha\mathring{C}=q \quad \text{for dispersion} \qquad (5.b)$$

すなわち，拡散問題を解く際に，普通の手法と同様な扱いを行うことになる．

(a)$q=v_nC_0$の境界；　これは元々ノイマンが考えている境界条件である．しかし，彼の論文にこの様な境界条件の基での例題はみられない．ここでは，流速が0.01m/d，拡散係数が0.1m²/d,遅延係数が1.0，空隙率が1.0，C_0が1.0,崩壊定数はゼロの場合の一次元移流拡散の問題を解く．この場合のペクレ数は50である．

結果と理論解との比較を図-1に示す．計算結果と理論解はきわめて良い一致を示している．

(b)q=dC/dxの境界；　この場合は先述のように普通の有限要素法で行われている境界条件の扱いと同様にする．すなわち離散化方程式の境界積分で表される項$Q_n=\int_S N_n(-Ddc/dx)ndS$に等価節点量のフラックスを入力する．用いた例題は，q=1.0，拡散係数が1.0，遅延係数，空隙率とも1.0，崩壊定数は0.0，そして流速はない状態の一次元問題を解く．この場合の支配方程式は伝熱方程式と同じになる．計算結果と理論解との比較を図-2に示す．結果は非常に理論解と良く一致する．しかし，これは流速場がゼロなので移流拡散問題ではなく，単に熱伝導問題であるので流速場での検討が必要であろう．

3．メッシュサイズの依存性について

筆者は既にさまざまなペクレ数に対するクーラン数と解の精度を調べ，クーラン数を大きくすると大きなペクレ数の問題でも安定度が増すことを示したが，それは主に時間ステップの大きさを変えてクーラン数を調節した結果であった．$C=V\Delta t/\Delta X$で定義されるクーラン数は時間ステップだけでなく，メッシュの取り方にも依存しており，特に有限要素法では，メッシュの大きさが不均一になる場合が多くその様な影響も調査しておく必要がある．ノイマンは移流を計算するときのメッシュを拡散を計算するときのメッシュよりも細かく取ることを推賞しているが，有限要素メッシュを別に設けることは実際の解析業務ではかなりの労力がい

ることなので，ここでは同一メッシュを用いた場合の傾向を見ることにする．

解析に用いた例題は，図-1の例題と同じである．解析パターンを表-1に示す．

ケース１の結果は図-1に示したものである．ケース１はメッシュが細かいので，クーラン数が１以上になり大体解析解とよく一致した結果になっている．時間ステップが均等でないケース1aの平均的なクーラン数と1cのクーラン数は同じであるが，均等に時間ステップを切った1cの方が，よい結果を示している．

ケース２の結果を図-3に示す．このケースでは，メッシュが粗いためクーラン数は１以下となっている．これによると，クーラン数が小さいほど濃度フロントが寝た形になっていることが分かる．同図の●は時間60 yearに対するクーラン数が1.461の時の値である．このメッシュの粗さではクーラン数を少し大きくした程度では精度が回復しないことがわかる．

ケース３の結果を図-4に示す．このケースは，フラックス境界付近のみ細かくメッシュを切り，徐々に離れるほど粗くなる場合である．この様なメッシュの切り方は有限要素法では一般に行われる物である．これによると，各要素の平均的なクーラン数が１以上である3aの時，解析解とよく一致している．この場合でもクーラン数が小さくなるに連れて，濃度フロントが寝ている．また，このケースは，ケース2と要素数がほとんど変わらない（ケース2；12，ケース3；12）のに，局所的にクーラン数が大きくなるために，同様のクーラン数である3b-2b,3c-2cを比べてもケース3の方がよい結果となっている．

４．まとめ

以上の結果をまとめると以下のように書ける．

a.オイラー・ラグランジェ手法ではフラックスで与える境界条件を濃度勾配による拡散と，流れに乗った物質の侵入の問題の二つに分けて考えることが必要である．

b.拡散解析と移流解析を同一メッシュで行う場合には，フラックス境界付近で，細かなメッシュを切った方が精度良く解ける．

c.メッシュを粗くする場合にはクーラン数が大きくなるように，かなりタイムステップを大きく切る必要がある．

d.時間ステップの間隔は，不均一よりも均一に切った方が精度がよい．

参考文献

1)Neuman,S.P.:J.Compt.,Phys.,41,pp.270-294,1981.
2)小林晃，第7回岩の力学国内シンポ,pp241-246,1987.

表-1　解析ケース一覧（単位m，ｙｅａｒ）

ケース	要素数	Δx	Δt	クーラン数	備考
1a	50	10		1.83	t=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,40,50,60
1b	50	10	10	3.65	
1c	50	10	5	1.83	
2a	10	50	10	0.73	
2b	10	50	5	0.37	
2c	10	50	1	0.07	
3a	12		10	1.89	x=10,20,30,40,50,100,150,200,250,300,400,500
3b	12		5	0.94	同上
3c	12		1	0.19	同上

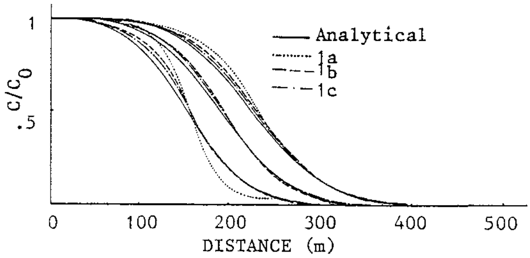

図-1　ケース１の解析結果

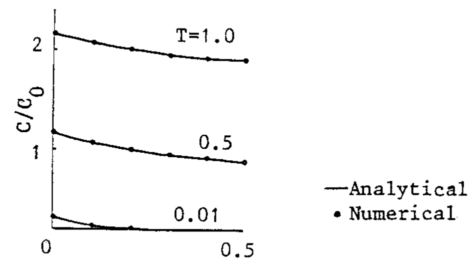

図-2　q=dC/dxの境界条件の解析結果

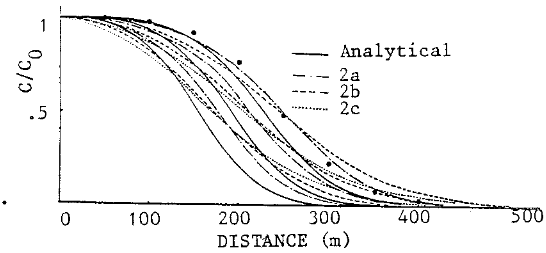

図-3　ケース２の解析結果

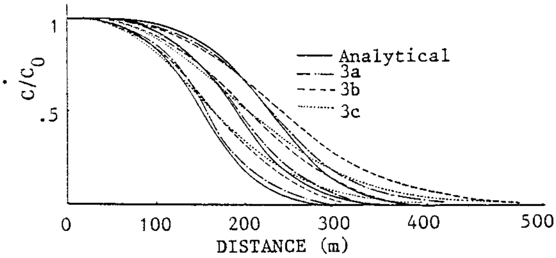

図-4　ケース３の解析結果