III-412　混合体の熱力学理論に基づく応力－浸透－熱移動連成問題の定式化

奥村組　正員　大熊　一由
埼玉大学　正員　山口　宏樹

1．はじめに

地熱発電、放射性廃棄物の地中処分など、近年の地下利用の多様化に伴ない、地盤の応力－浸透－熱移動連成問題が重要視されるようになり、これについて多くの研究がなされている[1)-3)]。しかし、この種の問題は数多くの現象が複雑に連成することから、既往の研究での支配方程式の誘導過程においてかなりの仮定が不明確な形で導入されており、現象を支配する最も基本的な方程式、つまり基礎方程式が明確に、かつ系統的に示されているとは言い難い。そこで本研究では、Atkinらの混合体理論[4),5)]をできるだけ忠実に適用し、かつ連続体の熱・力学理論[6)7)]での構成式誘導過程をも参考にして、仮定の導入を極力抑えて定式化を行った。研究の第一段階として飽和地盤を対象とし、本研究での結果を既往の研究[1)]と比較、考察している。

2、混合体理論による定式化

定式化にあったて以下の基本的な仮定を導入した。

1）対象とする地盤は等方性を有する多孔質体であり、固相と液状水相が飽和状態になっているものとする。
2）固相は等方線形弾性体、液状水相はNewton流体とする。
3）任意時刻における任意の空間位置において、各相の温度は共通である。
4）各相間の化学反応は考えない。

以上の仮定のもとに混合体理論を適用する。すなわち、固相、および液状水相より成る２相混合体を考え、時刻 t 、空間座標 x_i において各相の物質粒子が同時に存在する等価な連続体として扱う。この２相混合体について、基礎方程式として保存則と構成式を導いた。

（１）保存則

質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則が混合体、固相、液状水相のそれぞれについて成り立つが、そのうち独立なものは二つである。また、エネルギー保存則については仮定3)により、混合体についてのみ考えればよい。以下、各保存則を列挙する。

1）質量保存則：　$\frac{D}{Dt}\rho + \rho v_{i,i} = 0$，　$\frac{D^{(f)}}{Dt}\rho_f + \rho_f v^{(f)}_{i,i} = 0$　（1.a，b）

2）運動量保存則：　$\rho\frac{D}{Dt}v_i = \sigma_{ij,j} + \rho F_i$，　$\rho_f\frac{D^{(f)}}{Dt}v^{(f)}_i = \sigma^{(f)}_{ij,j} + \pi_i + \rho_f F^{(f)}_i$　（2.a，b）

3）エネルギー保存則：　$\rho r - q_{i,i} - \rho S\frac{D}{Dt}\theta - \left(\rho_s\frac{D^{(s)}}{Dt}S_s + \rho_f\frac{D^{(f)}}{Dt}S_f\right)\theta - \left(\rho_s\frac{D^{(s)}}{Dt}\phi_s + \rho_f\frac{D^{(f)}}{Dt}\phi_f\right)\pi_i a_i + \sigma^{(s)}_{ij}v^{(s)}_{i,j} + \sigma^{(f)}_{ij}v^{(f)}_{i,j} = 0$　（3）

ここで添字ｓは固相、ｆは液状水相を意味し、添字のないものは混合体についての量である。保存則において注意すべきは混合体であるが故に考える必要のある相互作用力 π_i である。これは液状水相の運動量方程式に陽に現れているように拡散力を意味し、構成式の誘導から各相間の相対運動と温度勾配とに関係することが明らかとなる。

（２）構成式

連続体の熱・力学理論[6)]を混合体に拡張して考え、２相混合体の構成式を可逆過程と不可逆過程とに分離して一般的な形で誘導した。

1）可逆過程　　ポテンシャルの役割を有する自由エネルギー密度関数ψより誘導する。自由エネルギー密度関数ψは、状態変数である固相のひずみε　、液状水相のひずみｅ　、温度θに依存していることから、これら状態変数に関するべき級数展開し、２次項までとると次式のようになる。

$$\rho\phi = \rho_0\phi_0 - \rho_0 S_0(\theta-\theta_0) - \frac{A_1}{2}e_{ii}e_{jj} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\rho_0 c}{2\theta_0}(\theta-\theta_0)^2 + A_2 e_{kk}\varepsilon_{kk}$$
$$- \left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)a_S\varepsilon_{kk}(\theta-\theta_0) - K_f a_f e_{kk}(\theta-\theta_0) \qquad (4)$$

可逆過程に関係するエントロピ供給密度$S^{(r)}$、準保存応力σ_{ij}は自由エネルギー密度と次式で示される関

係にあり、こららの式から関連する構成式が誘導される。

$$S^{(r)} = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \sigma^{q(S)}_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma^{q(f)}_{ij} = -p\delta_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial e_{kk}} \delta_{ij}$$

2）不可逆過程　不可逆挙動を支配する熱力学第二法則、つまりエントロピ生成不等式を基に不可逆過程に対する構成式を誘導した。エントロピ生成不等式はここでの問題に対して次式のように表される。

$$\rho \frac{D}{Dt} S^{(i)} = \frac{1}{\theta} \sigma^{(f)d}_{ij} d^{(f)}_{ij} + \frac{1}{\theta} \pi_i a_i - \frac{\theta_{,i}}{\theta} \frac{q_i}{\theta} > 0 \qquad (5)$$

一般にエントロピ生成は仕事率の次元をもっており、一般化力と一般化流束の積の和してと表すことができる。この問題では一般化力としては液状水相の散逸応力 $\sigma^{(f)d}_{ij}$ 、拡散力 π_i 、温度勾配 $-\theta_{,i}/\theta$ 、一般化流束としては液状水相の変形速度 $d^{(f)}_{ij}$ 、相対速度 a_i 、熱流束 q_i が考えられることから、上式が求められる。この一般化力と一般化流束は現象論的関係より線形関係[7]にあることが知られており、構成式の一般形が導かれる。さらに Onsagerの原理[7]、および Curieの対称原理[7]を適用し、線形関係式をエントロピ生成不等式に代入することで係数を判定した。その結果、以下の構成式が得られた。

$$\sigma^{(f)d}_{ij} = \lambda' d^{(f)}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu' d^{(f)}_{ij}, \quad \pi_i = D a_i - A_3 \theta_{,i}, \quad q_i = -k\theta_{,i} - A_3 a_i \qquad (6.a,\ b,\ c)$$

3．既往の研究との比較

既往の研究として飽和地盤の非線形連成問題を扱ったHartの論文[1]をとりあげ、有効応力とダルシーの法則について比較し、考察を加えた。

（1）有効応力　Hart論文では全応力から流体圧力を差し引いた有効応力を定義している。そこでこの有効応力を本研究の基礎方程式から導くと次式のようになる。

$$\sigma'_{ij} = \underset{①}{\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}} + \underset{②}{A_1 (\varepsilon_{kk} + e_{kk}) \delta_{ij}} + \underset{③}{\lambda' d^{(f)}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu' d^{(f)}_{ij}} - \underset{④}{K\alpha (\theta - \theta_0) \delta_{ij}} \qquad (7)$$

本研究での有効応力は、①固相の準保存応力、②固相と液状水相の相互作用力、③液状水相の散逸応力、④混合体の熱膨張応力からなっており、Hart論文では②と③が考慮されていないことが明かとなった。

（2）ダルシーの法則　液状水相の運動量保存則に相当するダルシーの法則について考察する。本研究で誘導した拡散力を、液状水相の運動量保存則に代入することで、ダルシーの法則の一般式が誘導できる。Hart論文で使われるダルシーの法則の一般式は、

$$a_i = -K_{ij} [(p\delta_{jm})_{,m} - \rho_f F^{(f)}_j] \qquad (8)$$

であるが、本研究では以下のように導かれた。

$$a_i = -K_{ij} [\underset{①}{(p\delta_{jm})_{,m}} - \underset{②}{\rho_f F^{(f)}_j} - \underset{③}{A_2 \varepsilon_{jj,j}} - \underset{④}{(\lambda' d^{(f)}_{kk} \delta_{jm} + 2\mu' d^{(f)}_{jm})_{,m}} + \underset{⑤}{\{K_f \alpha_f (\theta - \theta_0) \delta_{jm}\}_{,m}} - \underset{⑥}{A_3 \theta_{,j}}] \qquad (9)$$

Hart論文では、相対速度は透水係数を介して①液状水相の準保存応力（圧力）と②液状水相の物体力との和と線形関数になっているが、本研究での結果から、さらに③固相との相互作用力、④液状水相の散逸応力、⑤液状水相の熱膨張応力、⑥熱（不可逆過程）による連成の可能性があることがわかる。

4．おわりに

応力－浸透－熱移動連成問題の基礎方程式を混合体の熱・力学理論に基づき、系統的に定式化し、既往の研究との比較を行って新たな連成項の存在の可能性を示した。しかし、これらの項が有意であるか否かは対象とする現象に依存することは言うまでもない。

（参考文献）　1) Hart, R. D. et al. : Formulation of a Fully-coupled Thermal-Mechanical-FluidFlow Model for Non-linear Geologic Systems, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol.23, No.3, pp.213-224, 1986.　2) 大西有三他：有限要素法による応力－浸透－熱移動連成問題解析手法，土木学会論文集，第370号／Ⅲ-5，pp.151-158，1986年6月.　3) 小林　晃：熱移動－浸透－応力連成解析について－（第一報）基本方程式の誘導－，間組研究年報，pp.269-281，1985.　4) Atkin, R.J. et al.: Continuum Theories of Mixtures: Basic Theory and Historical Developement, Q.J. Mech. Appl.Math., Vol.XXIX, Pt.2, pp.209-244, 1976.　5) Atkin, R.J. et al. : Continuum Theories of Mixtures: Applications, J. Inst. Maths Applics, Vol.17, pp.153-207, 1976.　6) H．ツィーグラー著，田中訳：連続体の熱・力学入門，森北出版，1981.　7) ファン著，大橋他訳：固体の力学／理論，培風館，1972.