

III-294

歪硬化を考慮した砂地盤の変形解析

群馬大学 正 鶴飼恵三

1. まえがき

土質工学における基本的な安定問題である、支持力、斜面安定及び土圧の解析においては、2次元平面歪状態を仮定するのが普通である。砂の2次元状態での構成式としてしばしば用いられるのが、Roweの応力・ダイレイタンス式と、双曲線応力・歪関係式である。塑性論的に言えば、前者は流れ則であり、後者は硬化則を表す。本研究では、これら2式にもとづいて砂の応力・変形挙動を表現し、砂地盤の安定問題を弾塑性FEMによって解析することを試みる。なお、本研究は等方硬化則を前提としているので、砂地盤が単調に載荷される場合や特定の方向にのみ変形をうける場合、主応力回転の影響が少ないと考えられる場合などに適用される。

2. Roweの応力・ダイレイタンス式（流れ則）

Roweの応力・ダイレイタンス式は次式である。

$$R = \sigma_1 / \sigma_3 = K (-d\epsilon_3^p / d\epsilon_1^p) \quad (1)$$

σ_1 , σ_3 は最大・最小主応力（圧縮を正）。 $d\epsilon_1^p$, $d\epsilon_3^p$ は最大・最小塑性主歪増分（収縮を正）。 K は定数であり、拘束圧の大きさや砂の強度によらないで成り立つといわれている。式（1）より塑性ポテンシャル Φ は次のように表現される。

$$\Phi = \sigma_1^K / \sigma_3 \quad (2)$$

σ_1 , σ_3 は一般的な応力成分 σ_x , σ_y , τ_{xy} により次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 / 4 + \tau_{xy}^2} / 2 \\ \sigma_3 &= (\sigma_x + \sigma_y) / 2 - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 / 4 + \tau_{xy}^2} / 2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし、実際の地盤では x は水平方向、 y は鉛直方向に対応するものとする。式（2）、（3）より、

x, y 座標表示での塑性歪増分 $d\epsilon_x^p$, $d\epsilon_y^p$, $d\gamma_{xy}^p$ は

$$d\epsilon^p = \lambda \partial \Phi / \partial \sigma \quad (4)$$

と表される。ここで、 $d\epsilon^p = (d\epsilon_x^p, d\epsilon_y^p, d\gamma_{xy}^p)^T$ （ T は転置を表す）。 λ は比例係数。

3. 双曲線応力・歪関係式（硬化則）

粘土や砂の応力・歪関係式が双曲線式によって近似的に表現できることはよく知られている事実である（Kondnerら, Duncanら）。龍岡は豊浦砂の平面歪圧縮試験において、ピーク強度前までの実測値が次式によってよく近似されることを示した。

$$R - 1 = \gamma_{max}^p / (a + b \gamma_{max}^p) \quad (5)$$

ここで $\gamma_{max}^p = \epsilon_1^p - \epsilon_3^p$ は最大塑性せん断歪を表す。式（5）は $R - \gamma_{max}^p$ の関係として図-1のように表される。 $1/a$ は曲線の初期勾配を、 $1 + 1/b$ は R_{max} を表す。応力・歪関係が式（5）で表示される砂の摩擦角を ϕ とすれば、破壊条件式は

$$R = (1 + \sin \phi) / (1 - \sin \phi) (= R_{max}) \quad (6)$$

で表される。式（5）は R の増大と共に γ_{max}^p が双曲線的に増加することを表しており、降伏関数と考えられる。従って、降伏曲線は $R = \text{一定}$ 、で表示される。今応力パラメータとして、 $s = 1/2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$, $t = 1/2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)$ を導入すると、降伏曲線の傾きは $t/s = \text{一定}$ となり、 t と s は図-2の実線のように直線関係となる。ところで、表式は式（4）と少し異なるが、松岡は応力比とせん

断歪曲線の初期勾配の逆数が平均主応力の対数に比例すると仮定し、また Vermeer は同様な理由から平均主応力のべき乗に比例すると仮定した。本研究では、べき乗式を採用し、降伏関数として次式を用いる。

$$R = 1 + \gamma_{max}^p / [a (s/s_0)^\beta + b \gamma_{max}^p] \quad (7)$$

式(7)によって表される降伏曲線は図-2中の破線のように凸型の曲線になる。ここで、 s_0 は s を無次元化するために導入したものであり、また β は定数である。

4. 計算例

弾塑性FEMへの定式化は、通常の方法により行った。 $\beta = 0$ の場合の電算機用プログラムを作製した。プログラムチェックとして、図-3のモデルを平面歪圧縮するケースを計算した。有限要素は三角形定歪要素である。パラメータの値は、 $a = 0.008$ 、 $b = 0.2779$ 、 $\beta = 0$ 、 $s_0 = 10 \text{ kN/m}^2$ 、 $K = 3.238$ 、ヤング率 $E = 10000 \text{ kN/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ 。このケースは最終破壊状態において摩擦角 $\phi = 40^\circ$ 、ダイレイタンシー角 $\psi = 10^\circ$ に相当する。初期状態は、 $\sigma_x = \sigma_y = 10 \text{ kN/m}^2$ （等方応力状態）、 $\tau_{xy} = 0$ 、初期の弾性限界を与えるために初期の $\gamma_{max}^p = 0.001$ とした。収束計算はNewton-Raphson法を用いて処理し、収束の判定規準は（変位増分のノルム）／（全変位のノルム） $< 10^{-4}$ とした。 10^{-3} の場合も計算したが、計算結果の誤差が大きかった。図-4に $\gamma_{max}^p / (R-1) \sim \gamma_{max}^p$ 関係、図-5に $R \sim -\epsilon_2^p / \epsilon_1^p$ 関係を示した。式(5)と式(1)を良く再現しており、電算機用プログラムが本ケースに対して正しく作動したことを物語っている。

5. あとがき

本プログラムを、砂地盤の受動土圧のケース（擁壁高10m）に適用して計算を行ったところ、擁壁の変位が数cmに達した所で、計算結果が不安定になり発散してしまった。現在、プログラムを再チェックしている所である。今後、本方法を色々な安定問題に適用する予定である。

参考文献) 1) 龍岡文夫:「土の強さと地盤の破壊入門」第2章, 1987. 2) 松岡元・榊原和成: S & F. 27-4, 1987. 3) 田中忠次:「わかりやすい土質力学原論」pp. 203~243, 1987.

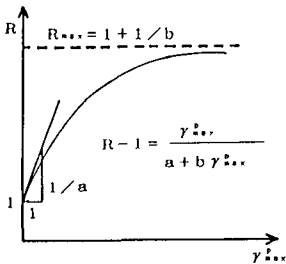


図-1 双曲線応力・歪関係

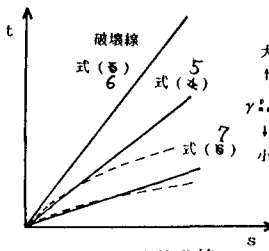


図-2 降伏曲線

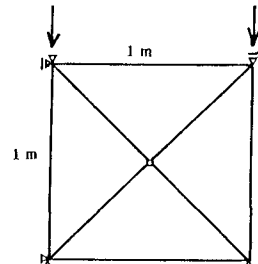


図-3 計算例

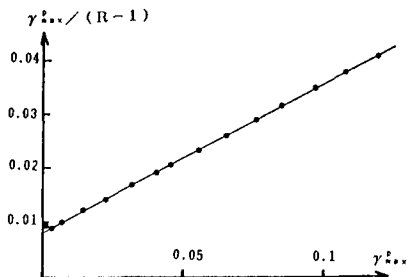


図-4 計算例の $R \sim \gamma_{max}^p$ 関係

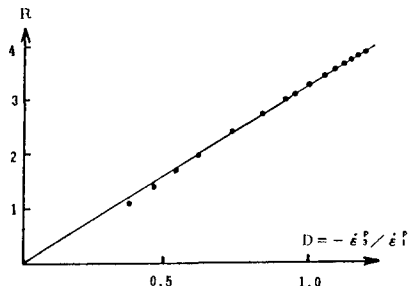


図-5 計算例の $R \sim D$ 関係