III-266　粒状体における最大塑性仕事の定理

東北大学工学部　正員　佐武　正雄

1．まえがき

塑性論において最大塑性仕事の定理[1]は一つの基本原理であるが，粒状体に対してどういう形式で表現されるかは明らかにされていなかった。本文は，応力とひずみ増分に対して新しい形の分解を与え，粒状体における最大塑性仕事の定理と関連流動則について説明する。

2．2次元の最大塑性仕事の定理

共軸性を仮定し，

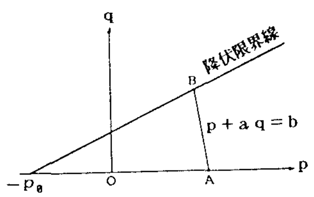
$$\left.\begin{aligned}&\text{応　力}\quad:\underset{\sim}{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \\ & \sigma_2\end{pmatrix}\\ &\text{ひずみ増分}:\underset{\sim}{\varepsilon}=\begin{pmatrix}d\varepsilon_1 & \\ & d\varepsilon_2\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&p=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2),\quad q=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\\ &d\varepsilon=d\varepsilon_1+d\varepsilon_2,\quad d\gamma=d\varepsilon_1-d\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

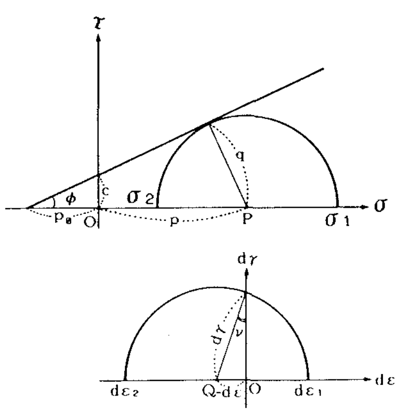
とおく。粒状体では，応力経路を指定することが必要で，図－1に示すように

$$p+aq=b\qquad(a,\ b\text{は定数})\qquad(3)$$

という直線経路A→Bを考える。



図－1



図－2

いま，この経路に沿って，Roweの応力-ダイレイタンシィ式（以下，S-D式と略記）

$$\frac{(\sigma_1+p_0)}{(\sigma_2+p_0)}\,\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}=-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_0}{2}\right)\qquad(4)$$

が成立するとする。図－2に示すように，

$$\sin\phi=\frac{q}{p+p_0},\quad \sin\nu=-\frac{d\varepsilon}{d\gamma}\qquad(5)$$

とおけば，式(4)は

$$\sin\nu=\frac{\sin\phi-\sin\phi_0}{1-\sin\phi_0\sin\phi}\qquad(6)$$

と書き直すことができる。すなわち，ダイレイション角νは応力経路と応力のパラメータϕによって確定する。

最大塑性仕事の定理を考えるため，応力，ひずみ増分について，次のような分解を考える。

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{\sigma}=\frac{1}{c}(p''\underset{\sim}{I}'+q'\underset{\sim}{J}'')\\ &d\underset{\sim}{\varepsilon}=\frac{1}{2c}(d\varepsilon'\underset{\sim}{I}''+d\gamma''\underset{\sim}{J}')\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{I}'=\underset{\sim}{I}+\sin\nu\,\underset{\sim}{J},\quad \underset{\sim}{J}'=\underset{\sim}{J}-\sin\nu\,\underset{\sim}{I}\\ &\underset{\sim}{I}''=\underset{\sim}{I}+a\underset{\sim}{J},\quad \underset{\sim}{J}''=\underset{\sim}{J}-a\underset{\sim}{I}\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}&p''=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}\cdot\cdot\underset{\sim}{I}''=p+aq\\ &q'=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}\cdot\cdot\underset{\sim}{J}'=q-p\sin\nu\\ &d\varepsilon'=d\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\cdot\underset{\sim}{I}'=d\varepsilon+d\gamma\sin\nu\\ &d\gamma''=d\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\cdot\underset{\sim}{J}''=d\gamma-a\,d\varepsilon\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

ただし，$\underset{\sim}{I}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$，$\underset{\sim}{J}=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$で，

$\cdot\cdot$は複内積を示す。

式(8)で定義したI', J', I'', J''について，次の直交条件が成立することに注意する。

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{I}'\cdot\cdot\underset{\sim}{I}''=\underset{\sim}{J}'\cdot\cdot\underset{\sim}{J}''=2c\\ &\underset{\sim}{I}'\cdot\cdot\underset{\sim}{J}'=\underset{\sim}{I}''\cdot\cdot\underset{\sim}{J}''=0\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

ただし，$c=1+a\sin\nu$　(11)

式(7),(10)より，仕事増分 dWは

$$dW=\underset{\sim}{\sigma}\cdot\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}=\frac{1}{c}(p''d\varepsilon'+q'd\gamma'')\qquad(12)$$

となるが，式(5),(9)より $d\varepsilon'=0$となるから，式(3)を用い，

$$dW=\frac{1}{c}q'd\gamma''=(cq-b\sin\nu)d\gamma\qquad(13)$$

を得る。従って，塑性ひずみ増分 $d\varepsilon$が与えられた場合，dWは，応力経路上でqが最大，すなわち降伏応力の場合，最大値をとる。

3．3次元の最大塑性仕事の定理

2次元の場合と同様の記号，文字を用いて議論する。ただし，偏差テンソルは複素数$\omega=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$による表現[2]を用い，$\underset{\sim}{J}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2\end{pmatrix}$

とし，

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{3}(\sigma_1+\omega\sigma_2+\omega^2\sigma_3) \\ d\gamma &= d\varepsilon_1+\omega\, d\varepsilon_2+\omega^2\, d\varepsilon_3 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

とおく。また応力条件は，2次元の場合と同様に

$$p+a\bar{q}+\bar{a}q=b \quad (15)$$

とし，この場合aは複素数である。応力経路はLodeのパラメータ（従ってqの偏角α）一定とする。バーは共役複素数，または共役複素数を成分とするテンソルを示す。3次元の場合のS-D式を

$$\frac{\sigma_1+p_\theta}{\sigma_{\underset{0}{1}}+p_\theta}d\varepsilon_1+\frac{\sigma_2+p_\theta}{\sigma_{\underset{0}{2}}+p_\theta}d\varepsilon_2+\frac{\sigma_3+p_\theta}{\sigma_{\underset{0}{3}}+p_\theta}d\varepsilon_3 = 0 \quad (16)$$

とおく。$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\underset{0}{\sim}}{\sigma}$の時に $d\varepsilon_1+d\varepsilon_2+d\varepsilon_3=0$ となるから，$\underset{\underset{0}{\sim}}{\sigma}$は与えられた応力経路で最小体積を与える応力である[3]。いま，降伏応力に対応する式(16)を

$$\underset{\sim}{I}'\cdot\cdot\, d\underset{\sim}{\varepsilon} = d\varepsilon' = 0 \quad (17)$$

$$\underset{\sim}{I}' = \underset{\sim}{I} + s\bar{\underset{\sim}{J}} + \bar{s}\underset{\sim}{J} \quad (18)$$

とおくことができる。sは$\underset{\underset{0}{\sim}}{\sigma}$と降伏応力によって定まる複素数である。$\underset{\sim}{I}'$に対し

$$\underset{\sim}{J}' = \underset{\sim}{J} - s\underset{\sim}{I} \quad (18')$$

とおく。また

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{I}'' &= \underset{\sim}{I} + a\bar{\underset{\sim}{J}} + \bar{a}\underset{\sim}{J} \\ \underset{\sim}{J}'' &= \underset{\sim}{J} - a\underset{\sim}{I} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

とすれば，応力の拘束条件は

$$p'' = \frac{1}{3}\,\underset{\sim}{\sigma}\cdot\cdot\underset{\sim}{I}'' = p+a\bar{q}+\bar{a}q=b \quad (20)$$

と記すことができる。この場合の直交条件は

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{I}'\cdot\cdot\underset{\sim}{I}'' = 3c,\ \underset{\sim}{J}'\cdot\cdot\bar{\underset{\sim}{J}}'' = 3d \\ &\underset{\sim}{I}'\cdot\cdot\underset{\sim}{J}' = \underset{\sim}{I}''\cdot\cdot\underset{\sim}{J}'' = 0, \\ &\underset{\sim}{J}'\cdot\cdot\underset{\sim}{J}'' = as \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} c &= 1 + a\bar{s} + \bar{a}s \\ d &= 1 + \bar{a}s \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

となり，式(7)に相当する分解は

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma} &= \frac{1}{c}p''\underset{\sim}{I}' + \frac{1}{d}q'\bar{\underset{\sim}{J}}'' + \frac{1}{d}\bar{q}'\underset{\sim}{J}'' \\ d\underset{\sim}{\varepsilon} &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{c}d\varepsilon'\underset{\sim}{I}'' \\ &\qquad + \frac{1}{d}d\gamma''\bar{\underset{\sim}{J}}' + \frac{1}{d}\overline{d\gamma}''\underset{\sim}{J}'\Big) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} q' + \frac{as}{d}\bar{q}' &= \frac{1}{3}\underset{\sim}{\sigma}\cdot\cdot\underset{\sim}{J}' = q - sp \\ d\gamma'' + \frac{as}{d}\overline{d\gamma}'' &= d\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\cdot\underset{\sim}{J}'' = d\gamma - a\, d\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

となる。仕事増分 dWは

$$dW = \frac{1}{c}p''d\varepsilon' + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{d}(q-sp)\ \overline{d\gamma}''\right] \quad (25)$$

と記すことができるが，S-D式(17)により第1項は消えるから，前と同様に，最大の dWは$|q|$が最大となる降伏時の応力によって与えられることがわかる。

4．関 連 流 動 則

3次元の場合，3個の主ひずみ増分の比を決定するためにはS-D式の他に流動則が必要である。3.の議論において，S-D式(16)または式(17)はひずみ増分の拘束条件であり，式(25)より $d\varepsilon'$に対して仕事をするp″が拘束力となっていることがわかる。p″は一般には自由であるが，本論では，応力経路の条件から式(20)により p″＝b（一定）となるように，式(23)の分解が構成されている。従って，金谷による修正関連流動則[4]を適用することができ，

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\sigma}}\right)^{*} f\ d\lambda \quad (26)$$

と記すことができる。ここに，$\left(\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\sigma}}\right)^{*}$は$\underset{\sim}{\sigma}$のパラメータ（p″，q′）の中，p″を一定として行う微分である。したがって，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\sigma}}\right)^{*} f &= \frac{\partial q'}{\partial\underset{\sim}{\sigma}}\ \frac{\partial f}{\partial q'} \\ &= \frac{d}{3c}\ \frac{\partial f}{\partial q'}\,(\bar{d}\,\underset{\sim}{J}' - a s\,\bar{\underset{\sim}{J}}') \end{aligned} \quad (27)$$

となり，こうして得られた $d\underset{\sim}{\varepsilon}$は，S-D式(17)を満たすものであることがわかる。

5．あ と が き

本文では，応力経路とS-D式の二つの条件に対応して定められる応力とひずみ増分の分解を与え，粒状体の最大塑性仕事の定理の成立や関連流動則について説明した。任意の応力経路に関する問題は今後の課題としたい。

参 考 文 献

1) R．ヒル（鷲津他 訳）：塑性学，培風館（1954），50，60
2) 佐武正雄：複素数ωを用いる3次元偏差テンソルの表現について，第37回応用力学連合講演会，1 aⅢ 06 (1987),145-146，または，M. Satake : Expression of Three-Dimensional Deviatoric Tensor through Complex Number ω, Theoretical and Applied Mechanics 37, to appear
3) 佐武正雄：仕事増分テンソルによる応力-ダイレイタンシィ式の考察，第23回土質工学研究発表会（1988)，
4) 金谷健一：粒状体の速度場の理論 ―関連流動則と特性曲面―，土質工学会論文報告集 19-4 (1979)，103-112