土木学会第43回年次学術講演会（昭和63年10月）

PSⅢ-1　一次元圧密理論の再構成

横浜国立大学　正会員　今井　五郎

1．はじめに

現在のところ最も普遍性が高い一次元圧密理論として、三笠[1]、Gibson[2]、のものがある。それらは共に流通座標系（Euler座標,Spatial座標）で立てた場の方程式を、初期座標系（Lagrange座標 または Material座標）に変換して得たものである。その際に空間座標の変換はしているものの、時間座標の変換はしてない。そのために骨格点の移動速度（以下 $\bar{v}_s$ ）を結果的に無視した理論となっている。

ところが水の質量保存則を詳細に吟味したところ、$\bar{v}_s=0$と仮定しなくとも、座標変換則を時空の両方にきちんと適用することで両方程式に一致する式が得られた。すなわち結果論として両方程式がそのままの形で正しいということがここに確認された。以下その内容を報告する。

2．Euler座標（z,t）による質量保存則

tにzを通過する骨格点の速度を$\bar{v}_s(z,t)$、近傍の間隙比を$e(z,t)$とする。またtにzを通過する水質量の速度を$\bar{v}_w(z,t)$とすると、土粒子（密度ρ_s =定値）と水（密度ρ_w =定値）の保存則は次の二式で与えられる。但し S_r =100% 。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_s}{1+e}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{1+e}\bar{v}_s\right)=0 \quad \cdots\cdots(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e\rho_w}{1+e}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e\rho_w}{1+e}\bar{v}_w\right)=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

Darcyの見掛け透水速度を$v(z,t)$とすると

$$v=\frac{e}{1+e}(\bar{v}_w-\bar{v}_s) \quad \cdots\cdots(3)$$

(1)、(2)を(3)に代入して(4)を得、(1)から(5)を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{e}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t}-\frac{\bar{v}_s}{1+e}\frac{\partial e}{\partial z} \quad \cdots\cdots(4) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{v}_s}{1+e}\right)=\frac{1}{(1+e)^2}\frac{\partial e}{\partial t} \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで$t=0$に$z=a$にあった骨格点に着目し、その軌跡を$z=z(a,\tau)$で表す（但し、数値的に$t=\tau$）。またその骨格点近傍の初期間隙比を$e_0(a)$とすると、座標変換則は

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1+e_0}{1+e}\frac{\partial}{\partial a} \quad \cdots\cdots(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \tau}-\bar{v}_s\frac{1+e_0}{1+e}\frac{\partial}{\partial a} \quad \cdots\cdots(7)$$

(6)、(7)を(4)、(5)に適用すると、着目骨格点近傍の質量保存則がLagrangeの（a,τ）座標で得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial a}=-\frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial \tau} \quad \cdots\cdots(8) \qquad \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\bar{v}_s}{1+e}\right)=\frac{1}{(1+e)(1+e_0)}\frac{\partial e}{\partial \tau}-\frac{\bar{v}_s}{(1+e)^2}\frac{\partial e}{\partial a} \quad \cdots\cdots(9)$$

3．Lagrange座標（a,τ）による質量保存式

骨格点 a と$a+\Delta a$に狭まれた土要素の厚さが$t=\tau$に$\Delta z(\tau)$になっているとする。骨格点 a の下面からΔz要素内に$\Delta\tau$時間に入る水の質量は、

$$\frac{e}{1+e}(\bar{v}_w-\bar{v}_s)\rho_w\Delta\tau=v\rho_w\Delta\tau \quad \cdots\cdots(10)$$

すなわち、その間に Δz から失われた水の質量は

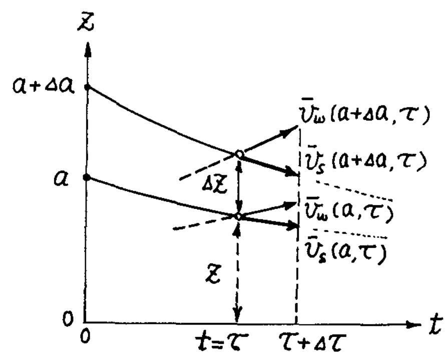
$$\left(\frac{\partial v}{\partial a}\Delta a\right)\rho_w\Delta\tau \quad \cdots\cdots(11)$$

一方、$t=\tau$に Δz 内にあった水の質量は

$$\frac{e}{1+e}\rho_w\Delta z \quad \cdots\cdots(12)$$

すなわち、その $\Delta\tau$ 間の減少量は

$$-\rho_w\Delta\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{e}{1+e}\Delta z(\tau)\right] \quad \cdots\cdots(13)$$



$* \ v=\frac{e}{1+e}(\bar{v}_w-\bar{v}_s)$

(11)と(13)は等値であるから、次式を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial a}=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{e}{1+e}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta a}\right)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{e}{1+e_0}\right)=-\frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial\tau} \quad \cdots\cdots(14)$$

(14)は(8)に一致する。すなわち、Euler座標で式を立ててもLagrange座標で立てても同じ質量保存則を得る（物理的に当然のことである）。なお $\bar{v}_s$ に関する式がでてこないのは、骨格に乗って水収支を議論しているからであり、その意味で $\bar{v}_s$ に関する(9)式は圧密の場の方程式としては不要である。

4．場の方程式

圧密の場の方程式を得るには、上述の保存式に力の釣合式と透水式を組み込む必要がある。それらは夫々（z,t）座標で次式で与えられる。但し h は全水頭、k は透水係数。

$$\frac{\partial h}{\partial z}=-\frac{1}{\gamma_w}\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial z}+\frac{\gamma_s-\gamma_w}{1+e}\right) \cdots\cdots (15) \qquad v=-k\frac{\partial h}{\partial z} \cdots\cdots (16)$$

(15)、(16)を組み合わせて

$$v=\frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial z}+\frac{\gamma_s-\gamma_w}{1+e}\right) \cdots\cdots (17)$$

座標変換則(6)を(17)に適用して（a,τ）座標系に直し、正しい場の方程式として次式を得る

$$v=\frac{1+e_0}{1+e}\frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial a}+\frac{\gamma_s-\gamma_w}{1+e_0}\right) \cdots\cdots (18) \qquad \frac{\partial v}{\partial a}=-\frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial \tau} \cdots\cdots (14)$$

なお、(14)と(18)を組み合わせた次式はGibson式に一致する。

$$-\frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{1+e_0}{1+e}\frac{\partial \sigma'}{\partial a}+\frac{\gamma_s-\gamma_w}{1+e}\right)\right] \cdots\cdots (19)$$

また、圧密比 $\zeta=(1+e_0)/(1+e)$ を用いて(19)を直した次式は三笠の式に一致する。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}=\zeta^2\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{k}{\gamma_w}\left(\zeta\frac{\partial \sigma'}{\partial a}+\frac{\gamma_s-\gamma_w}{1+e}\right)\right] \cdots\cdots (20)$$

5．骨格の構成式

$\partial e/\partial \tau$ は圧密に伴う e の減少速度を示す量であり、クリープの寄与分が入っていて構わない。すなわち、$de/d\tau$（$=\dot{e}$）で表現して良い量である。従来より粘性土の骨格の構成式として $\dot{e}=f(e,\sigma')$ のアイソタッチ型のものと $\dot{e}=f(e,\sigma',\dot{\sigma}')$ のものとが提案されている。著者の研究室で扱っている横浜港粘土はアイソタッチ型となることが今迄の研究で明らかにされており[3]、$\dot{e}-e-\sigma'$ 空間内の状態曲面が載荷方式の違いに拘らずユニークに定まることが判ってきた[4]。その関数形を容易に数式化することができ、一般的にここでは次式で表現しておく。

$$\dot{e}=f(e,\sigma') \cdots\cdots (21)$$

6．圧密の基礎方程式

圧密方程式を容易に解く手法として縮小座標 z_r が用いられる。z_r は土要素内の間隙を0とした骨格点の位置を示し、$z_r=a/(1+e_0)$ である。この z_r を用いると解くべき方程式(14),(18),(21)は

$$\boxed{\dot{e}=\frac{\partial v}{\partial z_r}, \quad v=\frac{k}{(1+e)\gamma_w}\left[\frac{\partial \sigma'}{\partial z_r}+(\gamma_s-\gamma_w)\right], \quad \dot{e}=f(e,\sigma')}$$

これらの方程式の解き方の一例は文献5)に示してある。

7．おわりに

水質量保存式の求め方に従来混乱があったが、その混乱に一応の終止符を打てることができたと考えている。なお、6．に得た方程式の数値計算例については当日発表する。

参考文献

1)　三笠正人　「軟弱粘土の圧密」　鹿島出版会，1963　　2)　Gibson,Hussey,　"The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays, I", Geotechnique 17,1967　3)　今井、他「一次元圧密に対する状態曲面の存在について」第22回土質工学発表会,(84),1987　4)　今井、他「定動水勾配圧密試験の分割型試験による解析」第23回土質工学発表会,1988　　5)　今井、他「アイソタッチ型構成式に基づく圧密解析」第23回土質工学発表会,1988