

II-345 三次元拡散問題への境界要素法の適用に関する研究

中部大学工学部

正員

松梨順三郎

富士通関西システムKK

正員

木村 剛士

まえがき 境界要素法では特異点をもつ要素での積分が必要であり、この取り扱いが計算精度に大きい影響をもっている。被積分関数は複雑であるので、一般に数値積分で処理される場合が多いが、これでは所要の精度が期待できない。したがって、少なくとも特異性をもつ要素については解析的に積分する必要がある。これまでに、境界要素法を用い、水深50m、長さ60kmの二次元水路とか大阪湾の三次元拡散モデルなどの数値解析を実施してきたが、上記の意味で計算精度の向上が必要である。本研究では計算領域を非常に簡単な辺長1の立方体とし、表面を三角形要素で分割し、特異積分の解析的处理方法の開発を研究の中心課題としてきた。若干の成果を得たのでその大要を報告する。

1. 問題の設定と境界要素法による定式化 図-1のように、平均流のない三次元異方性の乱流の閉水域を想定し、その表面を $S = S_1 + S_2$ とする。拡散の基礎方程式および境界条件は次のように与えられる。

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} = 0 \quad (1)$$

$$C = \bar{C} \quad S_1 \text{ 上} \quad \text{基本境界条件} \quad (2)$$

$$q_N = \bar{q}_N \quad S_2 \text{ 上} \quad \text{自然境界条件} \quad (3)$$

ここに、 C は濃度、 q_N は境界面上の外向法線方向の拡散流束、 N は法線、 $\bar{C}$ 、 $\bar{q}_N$ は既知量、 D_x 、 D_y 、 D_z はそれぞれ X 、 Y 、 Z 方向の拡散係数、とする。次に代表長を h 、水の密度を ρ とし、無次元量 x 、 y 、 z および c を

$x = \sqrt{D_z/D_x} X/h$ 、 $y = \sqrt{D_z/D_y} Y/h$ 、 $z = Z/h$ 、 $c = C/\rho$ 、によって導入する。図-2のような無次元辺長1の立方体の水域にこれを適用し、次のように問題を再設定する。

$$\partial c^2 / \partial x^2 + \partial c^2 / \partial y^2 + \partial c^2 / \partial z^2 = 0, \quad \Omega \text{ 内} \quad (4)$$

$$c = 0, \quad S_1 \text{ 上}; \quad q_N = \bar{q}_N, \quad S_2 \text{ 上}; \quad q_N = 0, \quad \text{残境界面上} \quad (5)$$

ここに、 $\bar{q}_N = h q_N / \rho D_z = 2.50086 \times 10^{-3}$ とする。

境界要素法によって式(4)と(5)を定式化し、図-3のように領域の表面を三角形に分割して、一定要素とすると、境界面上の i ($1 \sim 24$) 節点の濃度 c_i は次式で表される。ここに、 i 点は各要素三角形の重心とする。

$$k_i c_i + c_i \sum_{j=1}^m \iint_{\Delta_j} q * d s = q_i \sum_{j=1}^m \iint_{\Delta_j} c * d s \quad (6)$$

ここに、 m は節点数、 $q = \partial c / \partial n$ 、 $q * = \partial c * / \partial n$ で、基本解 $c *$ は

$$c * = 1 / 4 \pi r \quad (7)$$

で、 r は i 点と各要素内の任意点との距離である。式(6)をすべての節点について設定し、結果を行列表示すると次式を得る。ここに $[H]$ と $[G]$ は $m \times m$ の

$$[H] \cdot [C] = [G] \cdot [Q] \quad (8)$$

行列、 $[C]$ と $[Q]$ は m 列のベクトルである。また $i \neq j$ なら $H_{ij} = \bar{H}_{ij}$ で、 $i = j$ なら $H_{ij} = \bar{H}_{ij} + 1/2$ であり、

$$\bar{H}_{ij} = - \iint_{\Delta_j} \frac{R}{4 \pi r^3} d s, \quad G_{ij} = \iint_{\Delta_j} \frac{1}{4 \pi r} d s \quad (9), (10)$$

R は i 点と要素三角形 Δ_j との空間距離である。境界条件式

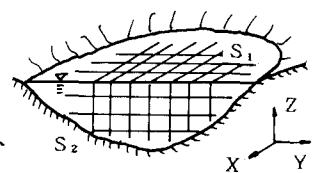


図-1 閉水域モデル

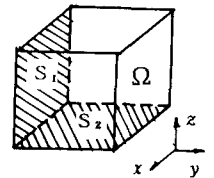


図-2 無次元モデル

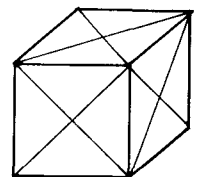


図-3 要素分割図

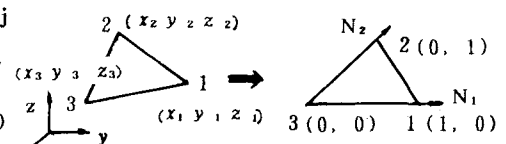


図-4 座標変換

(5)を式(8)に代入すると、この式の未知量の個数は m 個となる。まずこれを解く。次にあらためて領域内部の任意点 i の濃度を c_i とする。それは式(6)の k_i ($i=1\sim m$)を1に等値した式で与えられ、前段の境界値をこの式に代入することによって得られる。

2. $\bar{H}_{ij}$ と G_{ij} の計算

係数 $\bar{H}_{ij}$ と G_{ij} の計算を容易にするために、図-4のように次式によって直角座標系 x, y, z を面積座標系 N_1, N_2, N_3 に変換する。

$$x = \sum N_i x_i, y = \sum N_i y_i, z = \sum N_i z_i, i = 1 \sim 3 \quad (11)$$

上式によって直角座標系の微小三角形要素123は面積座標系の相対する微小三角形123に変換され、要素積分式(9)と(10)は次式となる。

$$\bar{H}_{ij} = -\int \frac{R}{4\pi r^2} [J] dN_1 dN_2, G_{ij} = \int \frac{1}{4\pi r} [J] dN_1 dN_2 \quad (12), (13)$$

ここに $[J]$ は座標変換に伴うヤコビアン行列の行列式である。

(1) $i \neq j$ の場合

この場合は被積分関数の特異点は現れないので、一般に数値積分法が用いられる。本研究ではGaussの7点積分法を用いた。

(2) $i = j$ の場合

この場合は要素内に $r=0$ の点が存在し、式(12)、(13)ともに特異性をもつ関数の積分となる。ただし、式(12)については式(6)にさかのぼり、 r と n が直交することにより $\partial r / \partial n = 0$ 、したがって $\bar{H}_{ii} = 0$ となる。一方、 G_{ii} は次のように計算する。図-5のように $\Delta 123$ を三個

$$G_{ij} = \frac{[J]}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{1}{r} + \iint_{S_2} \frac{1}{r} + \iint_{S_3} \frac{1}{r} \right\} dN_1 dN_2 = I_1 + I_2 + I_3 \quad (14)$$

に分割し、図-6のように積分順序を考慮して、例えば I_1 については次の

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[J]}{4\pi} \int_{N_1=0}^{N_1=1/3-\varepsilon} \int_{N_2=N_1}^{N_2=-2N_1+1} \frac{1}{r} dN_2 dN_1 \quad (15)$$

ようにする。 r を面積座標 N_1 と N_2 で表現すると、

$$r = \{PN_1^2 + QN_2 + R\}^{1/2} \quad \text{ここに、} P=A, Q=2(BN_1 - E/3),$$

$$R=CN_1^2 - 2FN_1/3 + D/9 \quad \text{で} \quad A=a_1^2+b_1^2+c_1^2, B=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2,$$

$$C=a_2^2+b_2^2+c_2^2, D=A+2B+C, \quad E=a_1+B, F=B+C \quad \text{で} \quad a_1=x_3-x_2,$$

$$a_2=x_3-x_1, b_1=y_3-y_2, b_2=y_3-y_1, \quad c_1=z_3-z_2, c_2=z_3-z_1$$

とする。式(15)の第一積分は解析的に積分が可能

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[J]}{4\pi} \int_{N_1=0}^{N_1=1/3-\varepsilon} \phi_1(N_1) dN_1 \quad (16)$$

であり、その結果を $\phi_1(N_1)$ とすると、式(16)

となる。関数 $\phi_1(N_1)$ は複雑であるが特異点は存在しない。したがって上式の積分はSimpsonの

数値積分を用いた。また、 I_2, I_3 も図-7と8を参照して、同様に求積することができる。

3. 結果と考察 図-9は計算結果であり、図-3の上面と下面の図心を結ぶ鉛直線上の濃度分布を表わす。分布は本計算の外に全積分をGaussの7点積分法で実行した場合の分布、および理論解を示す。

4. 参考文献 1) J.Matsunashi, T.Teratani, H.Okuda, Three-Dimensional Simulation of Hydro Mass Transportation in Nearly Closed Basins, Boundary Element VII Conference, 1986.

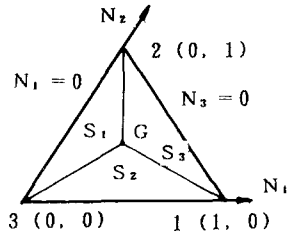


図-5 要素細分割図

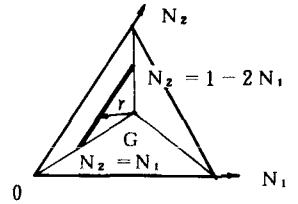


図-6 I_1 の計算

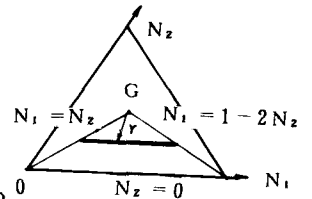


図-7 I_2 の計算

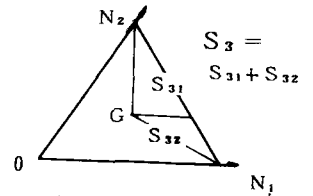


図-8 I_3 の計算

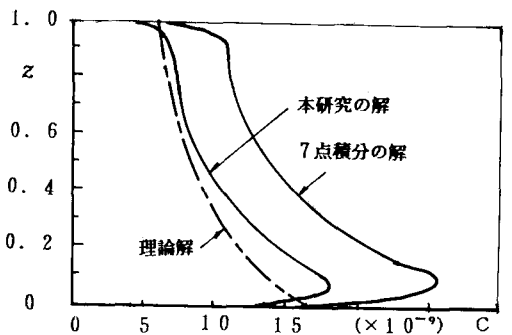


図-9 鉛直濃度分布(単位 p p b)