II-341

浅海長波方程式における入射波境界条件の処理

佐藤工業 株式会社 正 員 児玉 敏雄
佐藤工業 株式会社 正 員 金子 典由
中央大学 理工学部 正 員 川原 睦人

1．はじめに

差分法や有限要素法で波浪や潮流等の解析を行う場合、解析領域は一般に陸岸境界と入射境界によって設定される。非定常計算の場合、入射境界では周期的な水位あるいは流速を強制的に与える。この際、入射波の水位，流速を単純に入力すると解析領域の内部から入射境界に向かう波は境界の外へ透過せず再び反射することにより内部の解を乱すことがある。したがって、入射境界に対して、入射波と反射波の通過を考慮した境界条件の処理が必要となってくる。従来の有限要素法の計算では入射境界に対して水位または流速のどちらかを強制境界条件として与えるのが一般的で境界に特別な処理を施していない。差分法においては、この入射境界に対して透過仮想境界の考え方を適用した方法が示されている[1)]。この方法は規則的な差分格子の利点を活かしたアルゴリズムを用いているため、不規則な要素分割を行う有限要素法には適用しにくい。

本報では、有限要素法で浅海長波方程式を解く場合の入射波境界条件に対する一処理方法を提案する。この方法は、入射境界に対して水位を強制的に与え流速に対しては線形な浅海長波方程式の一般解を接続することにより入射波と反射波の通過を許容することが可能である。

2．基礎方程式および境界条件

基礎方程式として線形な浅海長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{3}$$

ここで、u，vは平均流速、ηは水位上昇量を表す。また、g，hは重力加速度，水深をそれぞれ表す。境界条件は以下に示すとおりである。

$$u = \hat{u}\ ,\ v = \hat{v} \qquad on\ \ S_1 \ \ （陸岸境界） \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \overline{u}\ ,\ v = \overline{v}\ \ （一般解） \\ \eta &= \hat{\eta}\ (t) \end{aligned}\right\} \qquad on\ \ S_2 \ \ （入射境界） \tag{5}$$

式中、＾は境界で与えられる既知量を表し、￣は一般解であることを示す。(5) 式に示すように、入射境界においては、水位ηに対して各時刻に既知量を強制境界条件として与え、流速u，vに対しては一般解を接続する。

3．定式化

線形な浅海長波方程式の一般解を次式のように選ぶ。

$$\begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \\ \overline{\eta} \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i(k_xX+k_yY)} + \beta \begin{Bmatrix} \sqrt{g/h}\,k_x/k \\ \sqrt{g/h}\,k_y/k \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-i\omega t} e^{i(k_xX+k_yY)} + \gamma \begin{Bmatrix} -\sqrt{g/h}\,k_x/k \\ -\sqrt{g/h}\,k_y/k \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-i\omega t} e^{i(k_xX+k_yY)} \tag{6}$$

ここで、(6) 式の第１項は定常的な水位，流速の変化を表す項で、第２項，第３項はそれぞれ進行波，逆行波を表す項である。k (kx, ky) は波数、ωは角振動数、ｉは虚数単位を表す。また、α，β，γは未定定数である。基礎方程式(1), (2) に重み付き残差法を適用し、第２項を部分積分し、ガウスの発散定理を用いる

と重み付き残差方程式を得ることができる。この操作により、入射境界上の境界積分項が現れるが、その中の変数には一般解を代入する。一般解の未定定数は入射境界における水位，流速の連続条件より決定することができる[2)]。解析領域を一次の三角形要素で離散化すると有限要素方程式が得られる。これらに対して２段階ラックスウェンドロフ法を適用し、時間積分を行う。

４．数値計算例

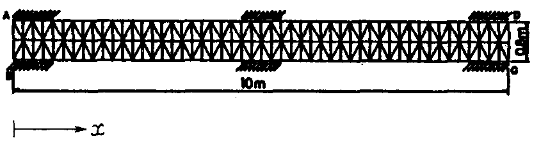
手法の検証のため、長方形水路における水面の振動解析を行った。図－１のモデルにおいて、境界ABで周期１秒，振幅0.1m，波長 9.90mのsin 波を与えた。境界BC,CD,DAでは完全反射の条件を設定した。計算には微小時間増分0.01秒を用いた。解析は水深が一定の場合と一定勾配で変化する場合について行い水位を解析解と比較した。この際、水位は計算がほぼ収束した時点の結果を採用している。水位の計算結果を図－２に示す。計算された水位は解析解と良く一致している。

５．おわりに

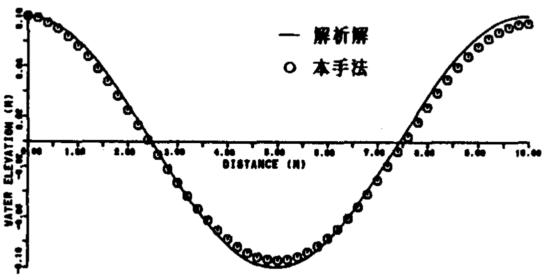
有限要素法で浅海長波方程式を解く場合の入射境界において、波高を周期的に与え、流速に対して一般解を接続する方法を示した。本手法を長方形水路の振動問題に適用した結果、解析解と良い一致を示した。今回の検証は１次元の単一波の場合に限られており、２次元問題に拡張するためには、境界における入射波，反射波の波向の設定が必要になってくる。今後、この問題を検討するとともに、本手法を潮流解析の入射波境界条件に適用していく考えである。

参考文献

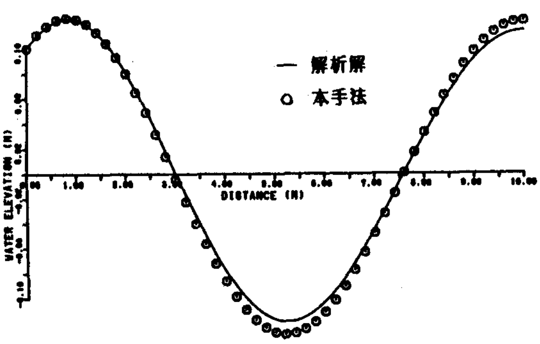
1)谷本，小舟：数値波動解析法による港内波高分布の計算，第22回海岸工学講演会論文集,pp.249-253,1975.
2)児玉，木下，川原：浅海長波方程式における開境界の処理に関する検討，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集,11,pp.385-390,1987.



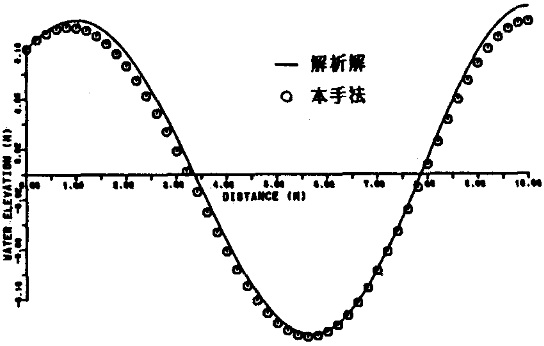
図－１　長方形水路モデル



(a) 水深一定（h=10m),t=22.25sec.



(b) 水深変化（h=7+0.3x),t=66.25sec.



(c) 水深変化(h=10-0.3x),t=59.25sec.

図－２　波高分布