II-340 気泡関数を用いた周期的浅水長波の有限要素解析のパッチテスト特性について

佐藤工業（株）　正員　歌川紀之
佐藤工業（株）　正員　金子典由
中央大学　正員　川原睦人

1．はじめに

近年，有限要素法解析における新しい要素が開発された．これは通常の三角形要素の中心点や各辺の中点に新たに節点を設け，その点に新しい補間関数を追加したものである．この新しい補間関数は気泡関数（Bubble Function ）と呼ばれている２次関数や３次関数である．これらの要素を用いると少ない節点数（自由度数）で高次の関数を表現できる利点があるものの非適合要素なので使用に際しては注意を要する．そこで解析に用いる前に，解析におけるその要素の特性を検討する必要がある．本論文では，流速は三節点三角形の中心点に２次の気泡関数を用いた要素，水位には通常の三節点三角形要素を使った周期的浅水長波の有限要素解析における，本要素の特性を検討するために行なったパッチテストの結果について報告する．

2．支配方程式

浅水長波の支配方程式を以下に示す．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + g\zeta_{,i} - A_l(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{(h + \zeta)u_i\}_{,i} = 0 \qquad (2)$$

3．気泡関数（Bubble Function ）

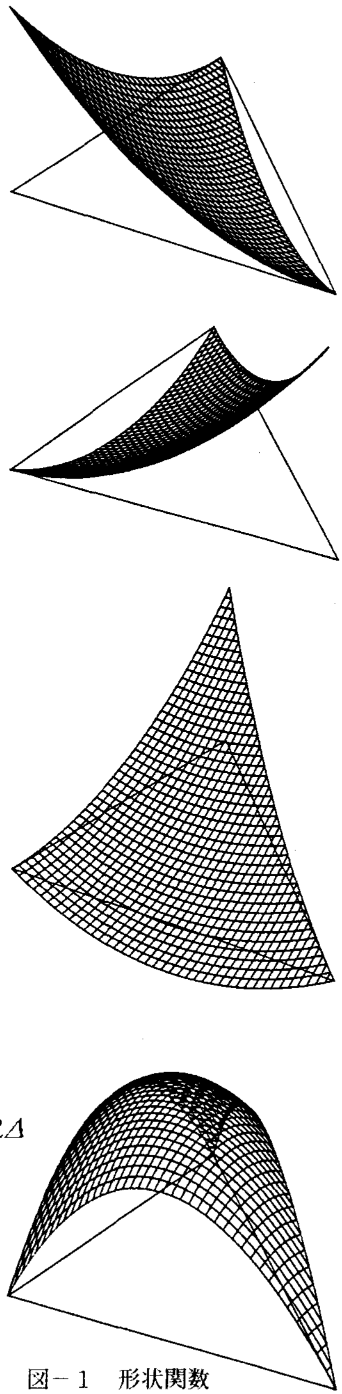
水位については従来の線形の三節点三角形要素を，流速については線形三節点三角形要素の中心点に気泡関数を用いた要素を使用した．気泡関数を用いた四節点三角形要素の形状関数は次式で表される．

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

$$\lambda_i = a_i + b_i x + c_i y \qquad \begin{aligned} a_i &= (x_j y_k - x_k y_j)/2\Delta \\ b_i &= (y_j - y_k)/2\Delta \\ c_i &= (x_k - x_j)/2\Delta \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = 2 - 3(\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2)$$

ここで，λ_1，λ_2，λ_3は面積座標である．　は λ_1〜λ_3より求められる．この形状関数を図－１に示す．この要素の中心点での関数の形が水中の気泡に似ていることから，この関数は気泡関数(Bubble Function) と呼ばれる．



図－１　形状関数

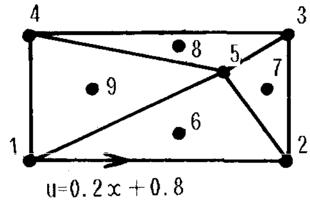
4．パッチテスト

２階の微分を含む支配方程式に重み付き残差法を適用する．この変分方程式は弱形式なので１階微分についての収束性を検討すればよい．そこで流速が線形に変化する問題を選ぶ必要がある．流速が線形に変化する問題は周期的な問題に存在しないので角速度（ω）を０とした定常問題を設定する．線形の定常問題の支配方程式は以下のようになる．

$$g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - A_l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4) \qquad h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

上記の支配方程式に線形に変化する流速分布（６）式を代入すると水深についての条件（７）式を得る．

$$u = ax + b \quad (6) \qquad h = \frac{a}{ax+b} + c_2 \quad (7)$$



図－２要素分割モデル

この計算条件でつぎの２種類のパッチテストを行なう．

（１）境界に線形に変化する流速を与え（$u_{x=0}$ ＝０．８，$u_{x=1.0}$ ＝１．０），領域内の流速が許容誤差内（±５％と設定）になるか

（２）全ての領域に線形の流速を与え，方程式の右辺が許容範囲内（ 0±0.0001と設定）になるか

パッチテストに用いた要素分割モデルを図－２に，パッチテスト（１），（２）の結果を表－１，表－２に示す．（１），（２）ともに許容範囲内にあるので，気泡関数を用いた本有限要素解析はパッチテストに合格したものと考えられる．

5．おわりに

気泡関数(Bubble Function) を用いた周期的浅水長波方程式の解析はパッチテストに合格した．このことより本要素の収束性が確かめられた。したがって，本要素を用いた解析では要素分割を細かくすることにより精度の良い計算結果が得られることが判明した．

参考文献

1. 川原，”有限要素法による浅水長波方程式の解析”第１回数値流体力学シンポジウム特別講演，pp.15～22，1987

2.Fortin, "Newer Element for Incompressible Flow", 5th International Symposium on Finite Element and Flow Problem, University of Texas at Austin, pp125 ～128, 1984

3.鷲津，他，”有限要素法ハンドブック，Ⅰ基礎編”，培風館，1981

4.A.Samuelsson, "Non-Conventional Finite Element Methods", Finite Elements in Fluids, Vol.3, pp.145～160, 1981

表－１パッチテスト（１）の計算結果

節点番号	位置	計算結果	厳密解	誤差（%）
1	0.0000	境界値	0.8000	－
2	1.0000	境界値	1.0000	－
3	1.0000	境界値	1.0000	－
4	0.0000	境界値	0.8000	－
5	0.7500	0.9399	0.9500	1.06
6	0.5833	0.9063	0.9167	1.13
7	0.9167	0.9761	0.9833	0.73
8	0.5833	0.9117	0.9167	0.55
9	0.2500	0.8359	0.8500	1.66

表－２パッチテスト（２）の計算結果

内部節点 節点番号	釣り合い条件 (方程式の右辺)
5	0.000066757
6	0.000015259
7	0.000007629
8	0.000006676
9	0.000017166