

II-339 気泡関数を用いた四節点三角形要素による周期的浅水長波の有限要素解析

佐藤工業（株） 正員 金子典由
 佐藤工業（株） 正員 歌川紀之
 中央大学 正員 川原睦人

1. はじめに

潮流などの周期的に繰り返す流れを予測するために、周期的浅水長波方程式の解法が用いられる。有限要素法による周期的浅水長波の解析では、従来、流速には六節点三角形要素、水位には三節点三角形要素が用いられてきた。これらの解析では2次関数の適合要素を用いるので、多大な演算時間が必要であった。一方、近年、Fortinは新しい有限要素を開発した。これは通常の三角形要素に新たな節点を設け、その点に新しい補間関数を追加したものである。この新しい補間関数は、気泡関数（Bubble Function）と呼ばれている。本論文では、三節点三角形の中心点に気泡関数を用いた要素を流速の形状関数とした周期的浅水長波の有限要素解析について報告する。

2. 支配方程式

浅水長波の支配方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + g \zeta_{,i} - A_t (u_{i,j,j} + u_{j,i,j}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{ (h + \zeta) u_i \}_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は流速、 ζ は水位、 g は重力加速度、 A_t は渦動粘性係数、 h は水深である。周期解を取り扱うので流速と水位を各々時間と空間に変数分離する。

$$u_i = \bar{u}_i e^{i\omega t} \quad \zeta = \bar{\zeta} e^{i\omega t} \quad (3)$$

(3) 式を(1)、(2)式に代入した支配方程式より重み付き残差法を用いて変分方程式を得る。

$$i\omega \int_V \{ u_i^* u_i \} dV + \int_V \{ u_i^* u_j u_{i,j} \} dV - \int_V \{ g u_i^* \zeta_{,i} \} dV + A_t \int_V \{ u_i^* u_{j,j} + u_j^* u_{i,j} \} dV = \int_V \{ u_i^* \hat{q}_i \} dV \quad (4)$$

$$i\omega \int_V \{ \zeta^* \zeta \} dV + \int_V \{ \zeta^* h_{,i} u_i \} dV + \int_V \{ \zeta^* \zeta_{,i} u_i \} dV + \int_V \{ \zeta^* h u_{i,i} \} dV + \int_V \{ \zeta^* \zeta u_{i,i} \} dV = 0 \quad (5)$$

3. 気泡関数（Bubble Function）を用いた有限要素

流速には要素の中心点に気泡関数を用いた四節点三角形要素、水位には従来の線形三節点三角形要素を用いて変分方程式を離散化する。線形三節点三角形要素の形状関数は、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= a_i + b_i x + c_i y \\ a_i &= (x_j y_k - x_k y_j) / 2\Delta \\ b_i &= (y_j - y_k) / 2\Delta \\ c_i &= (x_k - x_j) / 2\Delta \end{aligned} \quad (6)$$

三節点三角形要素中心点の気泡関数はつぎのように与えられる。

$$\lambda_4 = 2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \quad (7)$$

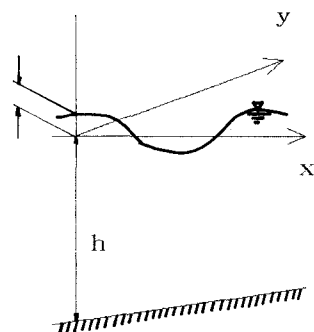


図-1 記号の説明

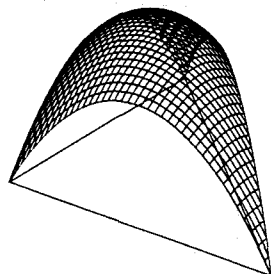


図-2 要素中心の気泡関数

4. 計算結果

本解析手法の妥当性を検証するため厳密解の存在する解析モデルを選んで計算する。解析例として長さ $L=10\text{ m}$ の長方形湾の波動解析を行なう。5分割、10分割と20分割の3種類の要素分割を用いて解析を行ない、計算精度を比較した。解析モデルと計算条件を図-3に示す。演算時間と平均誤差を表-2に示す。要素分割を細かくすると計算精度は向上する。図-3に流速と水位の分布を厳密解と比較する。これらの結果からも20分割の要素分割で十分な精度が得られることがわかる。

5. おわりに

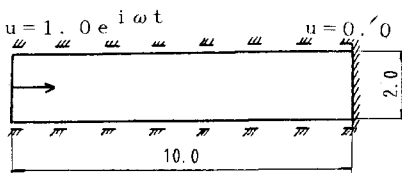
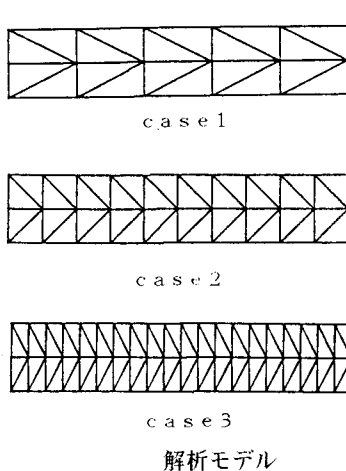
気泡関数(Bubble Function)を用い、周期的な浅水長波の解析を行なった。計算結果を厳密解と比較したところよく一致した。したがって、本手法の妥当性が検証された。今後は現地レベルの問題に適用していく予定である。

参考文献

1. 川原, "有限要素法による浅水長波方程式の解析" 第1回数値流体力学シンポジウム特別講演, pp15~pp22, 1987
2. Fortin, "Newer Element for Incompressible Flow", 5th International Symposium on Finite Element and Flow Problem, University of Texas at Austin, pp125 ~128, 1984

計算定数			
角振動数	ω	1.57080	/sec
重力加速度	g	9.81	m/sec^2
渦動粘性係数	A_1	1.0	m^2/sec
一定水深	h	1.0	m

表-2 計算結果の誤差			
ケース	自由度数	演算時間(秒)	誤差(%)
case 1	94	4	22.13
case 2	179	12	10.36
case 3	349	48	3.20



計算条件

図-3 解析モデル

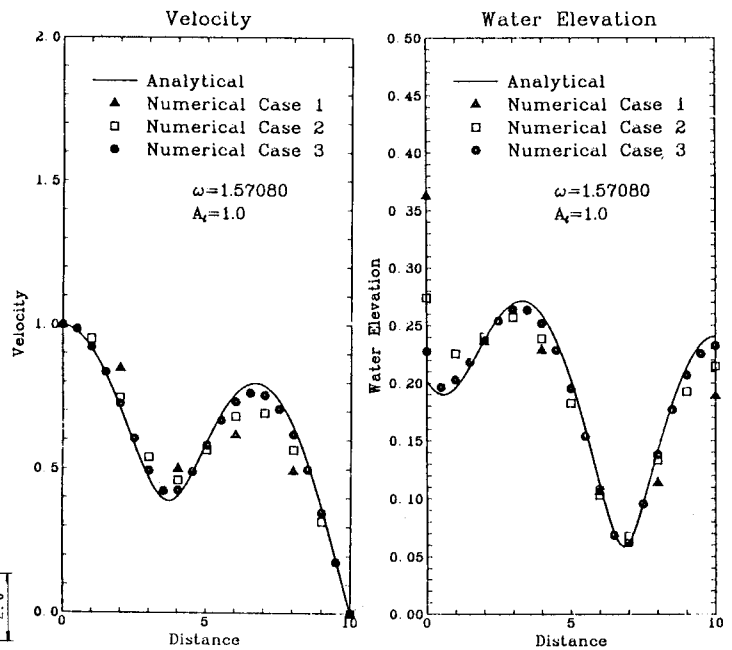


図-4 流速と水位の計算結果