II-268 流速修正法による非圧縮粘性流れの有限要素解析

○中央大学 学生員 林 正宏
中央大学 正 員 川原睦人

1．はじめに

本報文は、非圧縮粘性流れの解析を流速修正法による有限要素解析によって行うものである。流速修正法は、流速場と圧力場を逐次的に解くいわゆる fractional-step法の一つであり、流速と圧力に対して同じ次数の補間関数を用いることができる。そのため実際の流れに対して適用する場合、計算の効率化が図れるという利点がある。ところが、この方法では圧力に関する微分方程式を解くときの圧力に対する適切な境界条件が必要となってくる。従来は、流出境界で便宜的に圧力P＝0を境界条件として与えていたが、工学的な意味が不明確であった。そこで新たな方法として、流出境界上で圧力に関するポアソン方程式を各微小時間ごとに解き、それによって得られた流出境界上の圧力の値を領域全体の圧力を求める際の境界条件とする方法を提案する。

2．基礎方程式と境界条件

Navier-Stokes 方程式と連続の方程式はそれぞれ次のように表される。

$$\dot{U}_i + U_j U_{i,j} + \frac{1}{\rho} P_{,i} - \nu (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} = 0 \qquad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \qquad (2)$$

ここで、U_iはx_i軸方向の流速成分、Pは圧力、ρは密度、νは動粘性係数を表す。また、添字のコンマ",i"は平面座標x_iによる微分を表す。解析する流れの場全体をV、その境界をSとする。境界Sは、流速の規定される境界S_1、圧力の規定される境界S_2で構成される。

$$U_i = \hat{U}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3), \qquad P = \hat{P} \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

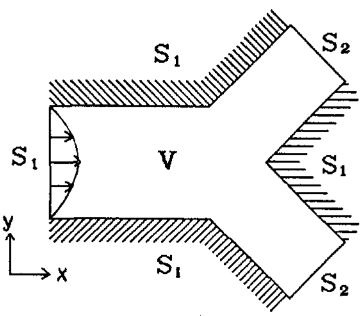


図１．解析モデル図

ここで流出境界（S_2境界）は、物理的に連続する領域を、ある有限な領域に限定するために人為的に定めた境界である。非定常問題においては境界条件を適切に与えない限り、物理的に有意な解析ができない。そこで、Navier-Stokes 方程式(1) と連続の方程式(2) より導いた境界上で成り立つ次のポアソン方程式を用いる。

$$P_{,xx} + P_{,yy} = 2\rho (U_{,x} V_{,y} - V_{,x} U_{,y}) \qquad \text{on } S_2 \qquad (5)$$

本来、式(5)は境界S_2上について成立するものであるが、本報文では図２に示すようにS_2境界を含む要素（V_2）に着目して、解析を進めるという方法を提案する。式(5)に対して、Galerkin法をV_2内に適用すると、次の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \hdashline P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \hdashline F_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

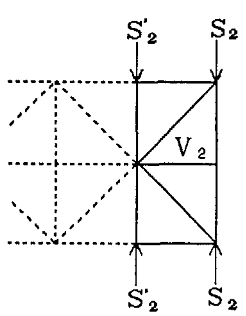


図２．流出境界

ここに、P_1，P_2はそれぞれS_2上およびS'_2上の圧力である。そこで、この式のP_2について前ステップにおける値を境界条件として与えると、S_2上の圧力P_1が求められる。これによって、境界上の圧力Pは毎ステップごとに更新されることになる。

3．流速修正法のアルゴリズム

① Navier-Stokes 方程式(1) を流速と圧力の各々の方程式に分離し、前進差分で近似して得られた中間的な流速 $\widetilde{U}_i$ を求める。

$$\widetilde{U}_i = U_i^n - \Delta t \{U_j^n U_{i,j}^n - \nu (U_{i,j}^n + U_{j,i}^n)_{,j}\} \tag{7}$$

② 式(5)を解いて、③で圧力Pを求める際の S_2 上での境界条件の値を求める。

③ 中間的な流速 $\widetilde{U}_i$ を用いて圧力Pを求める。

$$P^n_{,ii} = \frac{\rho}{\Delta t}\widetilde{U}_{i,i} \tag{8}$$

④ 時刻 t＝（n＋1）Δt での流速 U_i^{n+1} を求める。

$$U_i^{n+1} = \widetilde{U}_i - \frac{\Delta t}{\rho} P^n_{,i} \tag{9}$$

⑤ U_i^{n+1} を U_i^n として①へ戻り計算を繰り返す。

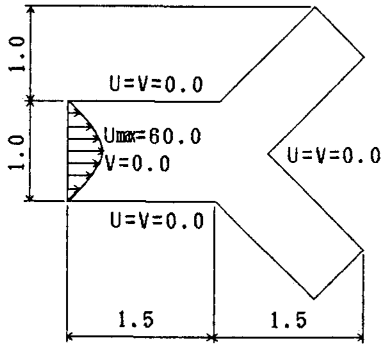


図3．解析領域と境界条件

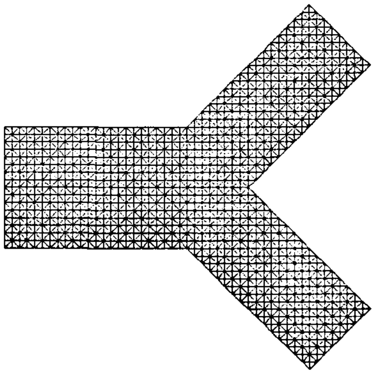
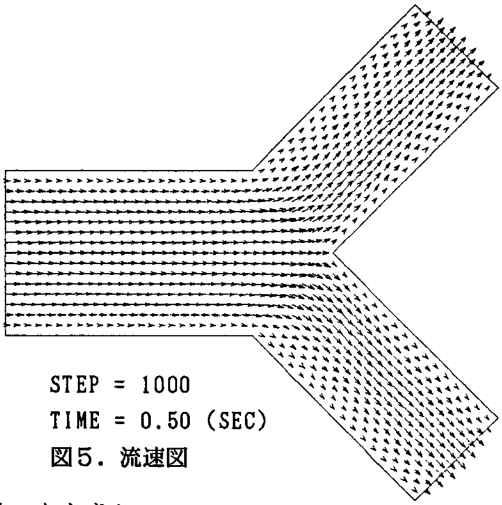


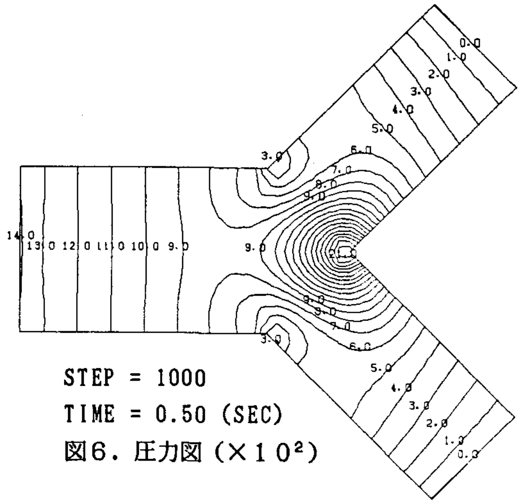
図4．有限要素分割図

4．数値解析例

図３に示すように、流入口１つに対して流出口２つの領域の流れについて、三角形要素を用いて解析を試みた。流入境界に最大流速 U_{max}＝60.0 という放物流を与える。また、微小時間増分量は Δt＝0.0005、動粘性係数は ν＝1.0 である。流入口を代表長さ、またそこでの最大流速を代表流速としたときのレイノルズ数は60.0である。図５は流速図、図６は圧力図である。圧力図を見ると、分流部の圧力が高くなっており、圧力が対称的に分布している様子がわかる。



STEP = 1000
TIME = 0.50 (SEC)
図5．流速図



STEP = 1000
TIME = 0.50 (SEC)
図6．圧力図（×10²）

5．おわりに

流出を伴う流れの分離解法に対して、従来の問題であった流出境界上で与える圧力の境界条件の取扱いに対して新しい方法を提案した。また、流出境界が２つある領域でもその妥当性を示した。