

1. はじめに； 開水路網非定常流の解析には、非線形な偏微分方程式系の Newton-Raphson法による反復解法がよく用いられている¹⁾。しかし、このような方法では複雑な開水路網に対してシステムモデルを系統的に定式化することが容易でなく、また、行列が巨大化するなどの数値計算上の不利がある。本研究の目的は開水路網を一般的な節点と枝から成るグラフで表現し、その幾何学的連結構造を利用した数値シミュレーション法の開発にある。そこで、このような視点から、まず、実用的な集中型システムモデルの系統的な行列表示について考察を加える。

2. 単一水路の集中型モデル； 図-1のように単一水路の区間をN-1個の小区間に分け、上流端と下流端の断面番号をそれぞれ1, Nとする。また、同図のグラフは単一水路部とその両端の断面をそれぞれ枝、節点に対応させて得られるものである。

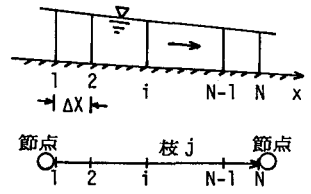


図-1 単一水路とそのグラフ

一般に、広幅水路における漸変非定常流の基礎式は分布型モデルの偏微分方程式系で表わされる。その特性方程式の線形近似化式に距離 X を図-1のように離散化し、6点差分スキームを適用することによって次の水位 Z と流量 Q の差分方程式系が得られている。²⁾

$$\begin{bmatrix} b_1^1 & b_4^1 & c_3^1 & c_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & b_1^2 & b_2^2 \\ a_3^2 & a_4^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1^{k+1} \\ q_1^{k+1} \\ z_2^{k+1} \\ . \\ q_{N-1}^{k+1} \\ z_N^{k+1} \\ q_N^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2' \\ R_2 \\ . \\ R_{N-1}' \\ R_{N-1} \\ R_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

式(1)は形式的には常微分方程式系の差分式であり、一種の集中型モデルともみられるものである。上式において、 Z と Q の上添字、下添字はそれぞれ時間ステップ、断面を表わしている。また、係数 a, b, c の上添字と定数 R の下添字は断面を表わしているが、これらはいずれも時間ステップ k における水面幅などの水路断面特性と特性曲線の伝播速度などの水理特性によって定まるものである。線形連立方程式(1)の未知量ベクトルを直接解く代わりに、Wood等は断面 $i=2 \sim N-1$ の内部点に関する部分係数行列と線形システムに有効な影響線の利用した間接的解法を提案している³⁾。これによると、内部点の Z あるいは Q は節点となる端点1 と N での Z と Q の線形結合で与えられ、しかも、式(1)の最初と最後の行の枝 j の節点に関する式は次の形式にまとめられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^j \cdot Z_1^{k+1} + \alpha_2^j \cdot Q_1^{k+1} + \alpha_3^j \cdot Z_N^{k+1} + \alpha_4^j \cdot Q_N^{k+1} &= R_1^j \\ \beta_1^j \cdot Z_1^{k+1} + \beta_2^j \cdot Q_1^{k+1} + \beta_3^j \cdot Z_N^{k+1} + \beta_4^j \cdot Q_N^{k+1} &= R_N^j \end{aligned} \right\} (2)$$

上式の左辺の係数 α, β と右辺の定数はすべて式(1)の内部点に対する部分係数行列と定数項ベクトル、および端点1とNで水位と流量をともに0としたときの内部点での未知量ベクトルによって定まるものである。式(2)は枝jの両端の節点での節点水位と節点流量の間に成立すべき関係を表わしており、これが開水路網の集中型モデルの基礎になる。

3. 開水路網のシステムモデルの定式化； 開水路網は単一水路が連結したものと考えられるので

ここでは、開水路網のグラフは一般に n 個の節点、 e 本の枝から成るとする。また、ソースノードとシンクノードの数を s, m とする。開水路網に対しては、 $2e$ 個の枝方程式(2)の他に、通常、 $(n - s - m)$ 個の中間ノードでの流量の連続条件と $(s + m)$ 個のソースおよびシンクノードでの境界条件を表わす n 個の節点方程式が書かれる。そこで、これらの式をまとめて系統的に行列表示するために、節点と枝の番号付けをつぎの規則にしたがって行なう。

まず、節点番号は順にソースノードに $1 \sim s$ 、中間ノードに $s+1 \sim n-m$ 、シンクノードに $n-m+1 \sim n$ を付与する。つぎに、任意の節点 a と b に連結な枝を (a, b) で表わすと、 a を $1 \sim n-1$ の順に選ぶとき、ある a に対して $a < b$ である枝 (a, b) に b が小さい方から順に番号 $1 \sim e$ を付与する。このような番号の節点と枝から成るグラフに関して、以下のような行列とベクトルを定義する。

$A(n, e)$: グラフの n 行 e 列の有向接続行列、 $A^*(e, n)$: A の転置行列、 $A_{\alpha 13}^*(e, n)$: A^* において枝 j の行成分に関して、 $+1$ の要素を α_1^j 、 -1 の要素を α_3^j に置換した行列、 $A_0(n, e)$: A の $+1$ の要素のみ残し、他の要素はすべて 0 に置換した行列、 $A_I(n, e)$: A の -1 の要素のみ残し、他の要素を 0 に置換した行列 (但し、シンクノードに対する要素 -1 は 0 に置換)、 $E_{\alpha 2}(e, e)$: 対角要素が α_2^j の対角行列、 $A_m(n, n)$: m 個のシンクノードの対角要素が $+1$ で他の要素は 0 の行列、 $Z(n)$: n 個の成分をもつ未知の節点水位ベクトル、 $Q_0(e)$: 枝の始点での未知の流量ベクトル、 $Q_I(e)$: 枝の終点での未知の流量ベクトル、 $D_1(e)$: 枝 j の成分に R_1^j をもつベクトル、 $D_2(e)$: 枝 j の成分に R_2^j をもつベクトル、 $D_3(n)$: 中間ノードの成分は 0 、ソースおよびシンクノードの成分は境界条件として与えられた水位あるいは流量であるベクトル、 $E_{\alpha 2}, E_{\alpha 4}, E_{\beta 2}, E_{\beta 4}$: 対角要素がそれぞれ $\alpha_2^j, \alpha_4^j, \beta_2^j, \beta_4^j$ の対角行列、 $A_{\beta 13}^*$: $A_{\alpha 13}^*$ において要素 α_1^j, α_3^j をそれぞれ β_1^j, β_3^j に置換した行列。

このような記号を用いると、水路網グラフの枝方程式と節点方程式をまとめて次のように簡単に行列表示することができる。節点水位と節点流量は式(3)を解いて求められる。

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha 13}^* & E_{\alpha 2} & E_{\alpha 4} \\ A_{\beta 13}^* & E_{\beta 2} & E_{\beta 4} \\ A_m & A_0 & A_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z \\ Q_0 \\ Q_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

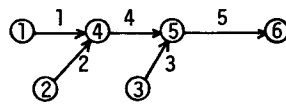


図-2 水路網のグラフ

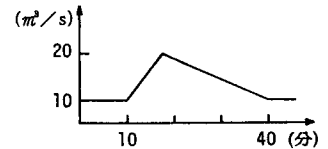


図-3 節点1の境界流量

4. 計算例； 図-2の長方形断面のモデル水路網に上述の解法を適用した。節点1での境界流量を図-3に、また、水路諸量を表-1に示す。節点2と3の流量は $10 \text{ m}^3/\text{s}$ 、水位基準節点6の水位を 1.7 m で一定とし、 $\Delta x = 50 \text{ m}$ 、 $\Delta t = 30 \text{ 秒}$ を用いて計算した。図-4は合流節点4の上流の枝1と2の内部点4における水位～流量の関係を示したものである。これによると、合流部のせき上げ背水による河道内貯留の現象が表現できていることがわかる。

5. おわりに； 以上、開水路網における漸変非定常流の集中型モデルによるマトリックス解法的一端を述べたが、今後はモデルの定式化をより一層系統的に行ない、プログラミングが簡単かつ標準化されうような数値シミュレーション法を展開したいと考えている。 <参考文献>

表-1 水路諸量

水路幅 (m)	4 (j=1~3), 6 (j=4), 8 (j=5)
区間長 (m)	200 (j=1~5)
水路床勾配	1/1000 (j=1~5)
粗度係数	0.01 (j=1~5)

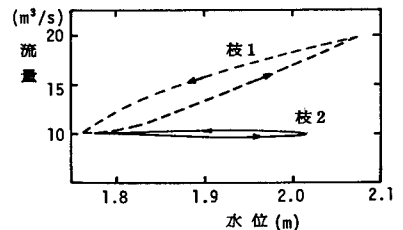


図-4 水位～流量の関係 (内部点4)

- 1) Joliffe, I.B.: Computation of Dynamic Waves in Channel Networks, Jour. Hyd. Eng., ASCE, Vol. 110, No.10, 1984.
- 2) Gunaratnam, D. and F.E. Perkins : Numerical Solutions of Unsteady Flows in Open Channels, Tech. Rep. 127, M.I.T., 1970.
- 3) Wood, E.F. et al.: Transient Flow Routing in Channel Networks, Water Resour. Res., Vol.11, No.3, 1975.