II-262　動的計画法を用いた４点implicit法による洪水解析

（株）日水コン　正員　中川　芳一
（株）日水コン　正員　蔵重　俊夫
（株）日水コン　正員○和田　芳樹

１．はじめに

今後の河川計画の分野における洪水流の解析は、コンピューターの進展などに伴ない、不定流解析が実用的にも主流になることは疑う余地がないように思える。この方法としては、これまでも数多くの提案があり、様々な角度から比較検討がなされている[1)2)]。こうした中で、Amein の４点implicit法は、精度良く、しかも安定で迅速な解が得られる数値解析法として注目されている[3)]。しかし、この方法は、大規模な逆行列演算を伴うことから、場合によっては解が求まらないことが起こりうる。このため、本稿は、動的計画法を用いた４点implicit法による新しい洪水解析法を提案し、その特性を示すものである。

２．モデルの概要

２－１．Amein の４点implicit法

４点implicit法はAmein によって提案されたもので、図１のようなmeshにおいて各点の量 $\alpha=\alpha(x,t)$ を以下のように差分化したものである。本稿では、St.Venant の基礎式を４点implicit法で差分化した。

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{4}(\alpha_A+\alpha_B+\alpha_C+\alpha_D) \quad \cdots(1)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}=\frac{1}{\triangle t}\left(\frac{\alpha_A+\alpha_D}{2}-\frac{\alpha_B+\alpha_C}{2}\right) \quad \cdots(2)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{1}{\triangle x}\left(\frac{\alpha_D+\alpha_C}{2}-\frac{\alpha_A+\alpha_B}{2}\right) \quad \cdots(3)$$

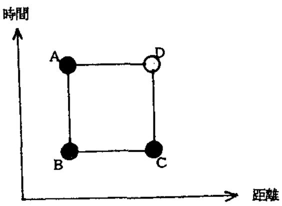

図1.4点implicit法の差分mesh

２－２．Amein の４点implicit法の動的計画法による解法

動的計画法は、非線形の場合や不確実性のある場合を含む広範囲の多段階決定過程の解法として、R.Bellman により開発された一つの数理計画法である。Amein の４点implicit法は、各分割河道の下流端水位および流量を入力すれば、上流端水位および流量が出力される状態になっており、さらに各分割河道において連続方程式および運動方程式の誤差を最小とするように解かれることから最適性の原理の適用が可能である。

以上より、Amein の４点implicit法は動的計画法により次のように定式化される。

状態方程式　$H^{t+1}_{i+1}=H^{t+1}_{i}+\triangle H^{t+1}_{i+1} \cdots(4)$　$Q^{t+1}_{i+1}=Q^{t+1}_{i}+\triangle Q^{t+1}_{i+1} \cdots(5)$

ただし、ｔ：既値の時刻、ｔ＋１：未知の時刻、ｉ，ｉ＋ｉ：距離方向の点、Ｈ：水位、Ｑ：流量、△Ｈ：ｉとｉ＋ｉの水位差、△Ｑ：ｉとｉ＋ｉの流量差

状態量　$x_{i+1}=(H^{t+1}_{i+1},\ Q^{t+1}_{i+1}) \cdots(6)$　決定変数　$d_{i+1}=(\triangle H^{t+1}_{i+1},\ \triangle Q^{t+1}_{i+1}) \cdots(7)$

利得（連続方程式と運動方程式の誤差）

$$e_{i+1}(d_{i+1})=f(x_{i+1},\ d_{i+1}) \quad \cdots(8)$$

関数方程式

$$E_{i+1}(x_{i+1})=\min_{d_{i+1}}\left[e_{i+1}(d_{i+1})+E_i(X_i)\right] \quad \cdots(9)$$

上式による分割河道断面での水位と流量の多段階決定過程を図２に示す。同図に示すように、最終段階での政策（E_{iEND}）が定まれば、直ちに各段階（各河道断面）における状態量（水位・流量）が得られる。なお、誤差ｅは連続方程式と運動方程式の誤差のオーダーを考慮し、次のように設定した。

$$e_{i+1}\ (d_{i+1}) = (\triangle x / \triangle t \cdot eC\,(x_{i+1},\ d_{i+1}))^2 + (eM\,(x_{i+1},\ d_{i+1}))^2 \quad \cdots(10)$$

ただし、eC：連続方程式の誤差、eM：運動方程式の誤差、△ｘ：計算距離step、△ｔ：計算時間step

3．モデルの適用性の検討

本稿では、図３に示す河道モデルを対象として本モデルの適用性を検証した。本モデルの計算条件を表１に、計算結果を図４に示す。なお、同図には、４点implicit法の一般的な解法であるNewton法による計算結果を併記する。本モデルの計算時間は、Newton法に比べ、約 300倍の時間を要した。しかし、本モデルはNewton法に対し、①発散が生じない、②最終時間stepの上流端境界条件（流量）が変化した場合の感度分析が可能である、などの利点を有しており、計算精度においても高々２m^3/sの差であった。

以上のことから、本モデルは、出水時などの緊急時のダム管理において非常に有効な手段であると考えられる。

4．おわりに

本稿は、不定流解析におけるAmein の４点implicit法の動的計画法による解法を提案し、従来の方法との比較検討を行なったものである。この結果、本モデルは、計算時間でNewton法に比べ大きく劣るが、計算結果に差はほとんどなく、発散が生ぜず、さらに最終時間stepの上流端境界条件（流量）が変化した場合の感度分析が可能であることから、出水時などの緊急時のダム管理において非常に有効な手段であると考えられる。ただし、今後、ＤＤＤＰ法の適用による演算時間の短縮などが課題として残ろう。最後に、本稿の作成に当り御尽力頂いた㈱日水コンの元根剛氏ならびに田中成尚氏に謝意を表します。

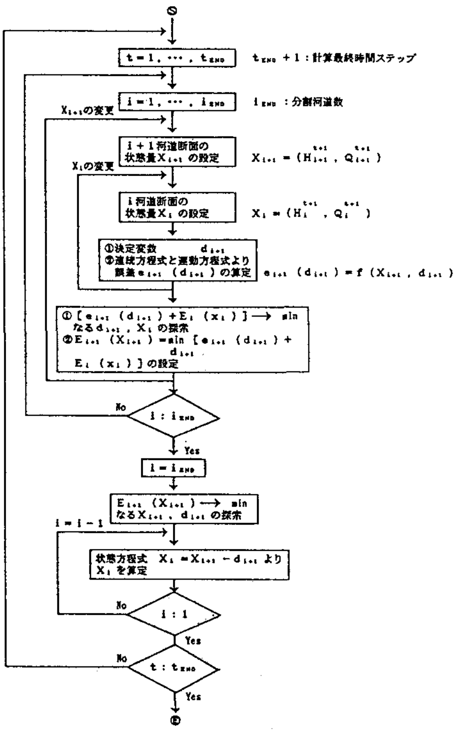

図２．動的計画法による４点Implicid法の解法

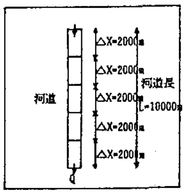

図３．河道モデル

表1．計算条件

水位分割数		11　単位 0.05 m
流量分割数		11　単位 2.0m^3/s
境界条件	下流	水位
	上流	流量
△T		600秒
△X		2000m

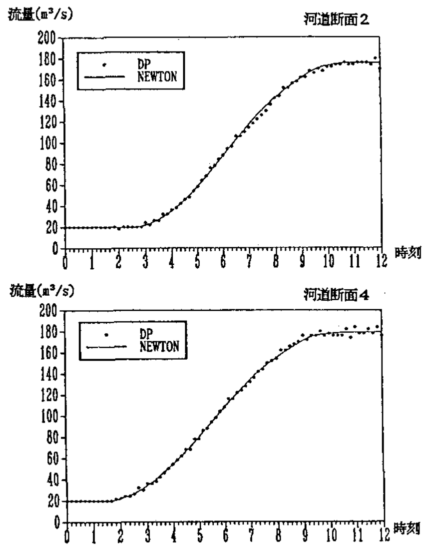

図4．流量計算結果

［参考文献］1)Bettess,R.and R.K.Price:Comparison of Numerical Methods for Routing Flow along a Pipe,Hydraulics Research Station,Rep.No.IT-162,1976　2) 神田徹、北田隆久：不定流の数値計算法に関するCRITICAL REVIEW,建設工学研究報告，1975　3)Price,R.K.:Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing,ASCE,Vol.100,HY7,1974