

II-261 諏訪湖と野尻湖のセイシュの振動周期

信州大学工学部 正員 富所五郎

1. まえがき

湖のセイシュの固有振動周期を求めることは、湖の流動特性を把握する上に於て、きわめて重要なことである。本研究は、諏訪湖と野尻湖のセイシュの固有振動周期を、湖水位と内部境界面付近の水温の現地観測及び数値解析より求めるものである。一層状態に於けるセイシュについては、非線形項・粘性項などを除いたReynolds運動方程式と連続式から導ける二次元の波動方程式を、有限要素法に依って定式化し、固有値問題に帰着させる方法が提案されている¹⁾。本研究では、この方法を発展させ、二層状態にあるセイシュの固有周期を求めるための数理モデルを求め、その妥当性の検討を行う。

2. セイシュの固有周期の数理モデル

上層・下層に対して運動方程式と連続式を立て、各層内で積分すると、

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\zeta+d)}{\partial t} + d \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + g \left\{ \varepsilon \frac{\partial(\zeta+d)}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial x} \right\} &= 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + g \left\{ \varepsilon \frac{\partial(\zeta+d)}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y} \right\} = 0 \\ \frac{\partial(-d)}{\partial t} + (h-d) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。ここでは、流速は各層で鉛直方向に一定で、非線形項・粘性項は無視している。また、岸の法線方向の流速は零、 $d = \bar{d} + d'$ とし、 $\bar{d} \gg \zeta$, $\bar{d} \gg d'$ と仮定している。さらに、圧力を $p = \rho g(\zeta - z)$ とし、 $\varepsilon = \rho_1 / \rho_2$ である。式(1)より u_1, v_1 を、式(2)より u_2, v_2 を消去すると

$$\frac{\partial^2(\zeta+d)}{\partial t^2} - g d \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2(-d)}{\partial t^2} - g(h-d) \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \right) \right\} = 0 \quad (3)$$

となる。さらに、上式を加え合わせると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g d \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - g(h-d) \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \right) \right\} = 0 \quad (4)$$

ここで、式(3)の後の式と式(4)が二層状態にあるセイシュを支配する波動方程式である。

次に、時間微分項を消去するために、 $\zeta(x, y, t) = \beta(x, y) \cos(\sigma t)$, $d(x, y, t) = \gamma(x, y) \cos(\sigma t)$ とおき、波動方程式に代入すると、

$$-\lambda^2 \beta + \{ (h-d) \varepsilon + d \} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) - (h-d)(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\lambda^2 \gamma + (h-d) \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) - (h-d)(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6)$$

が得られる。ここに、 $\lambda^2 = \sigma^2 / g$ であり、 $\sigma = 2\pi / T$ (T は振動周期) である。次に、式(5), (6)に β, γ の近似関数として $\beta = N_i \cdot \beta_i, \gamma = N_i \cdot \gamma_i$ ($i = i, j, k$) を代入して、重み関数として N_i を掛けて要素内で積分する。ここに、総和規約を用いており、 $N_i = N_i(x, y)$ は形状関数で、ここでは三角形一次要素のそれを用いる。また、 i, j, k は三角形の頂点である。二階の微分項をGreen-Gaussの定理を用いて一階に下げ、流速の境界条件を入れると、式(5), (6)は、

$$[-\lambda^2 \int N_i N_j ds + \{ (h-d) \varepsilon + d \} \int \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds] \cdot \beta_j - (h-d)(1-\varepsilon) \int \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds \cdot \gamma_j = 0 \quad (7)$$

$$[\lambda^2 \int N_i N_j ds + (h-d) \varepsilon \int \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds] \cdot \beta_j - (h-d)(1-\varepsilon) \int \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds \cdot \gamma_j = 0 \quad (8)$$

上式は単一要素の場合であるが、要素が多数存在する場合は、上式の各項を各要素について求め、重み関数

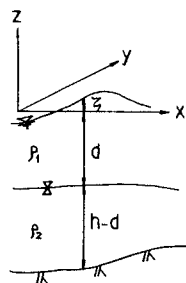


図1 座標の定義

に従って重ね合わせると、全体的な離散化式が得られる。行列形式で表すと

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ r \end{Bmatrix} \quad (9)$$

となり、一般的な固有値問題に帰着される。

3. 諏訪湖と野尻湖のセイシュの振動周期と考察

湖水位の変化は、波高計を用いて測定したが、風波による高周波成分をカットするために、小穴をあけた底蓋をつけた内径20cmの塩化ビニール製のパイプ内に固定して観測した。観測時間は、2-5時間である。また、野尻湖は9月-10月初旬にかけ変水層の非常に薄い典型的な二層状態を示すが、この変水層付近の水温を、水底のおもりと水中に没している浮きを結ぶワイヤーに1mの間隔で取り付け付けた2ヶの温度センサーを用いて観測した。観測時間は2日である。また、水温の鉛直分布は船上よりサーミスタ温度計を吊り下げ、随時観測した。

2. の数理モデルの妥当性は、先ず解析解の得られる幅と水深を一定とした細長い長方形湖に適用して検討した。式(14)の数値解は、解析解のそれとよい一致を示した。なお、このモデルは二層状態に対するモデルであるが、 $\rho_1 = \rho_2$ におけば、解は一層モデルの解に一致し、一層状態の解析にも適用可能である。

諏訪湖： 諏訪湖の観測結果を表1に示す。ここで、データ数は600ヶ、読み取り間隔は20sで、MEMによりスペクトルを求め振動周期を決めた。固有周期の数値解は、1335s、915s、700s、591s・・・であり、観測値は長軸方向の固有振動周期と思われる(諏訪湖は4.2*3.0kmの長方形に近い形である)1335s、700sに近い。順位1の周期は、従来言われていた1250sより少し大きい、これは湖が浅くなっていることが原因と考えられる。なお、水温は観測時には一定で、またセイシュの最大振幅は1cm以下であったが、別の観測のそれは5cm程にもなっている。

野尻湖： 野尻湖の水面の振動周期を表1に示す。この結果のデータ数は600ヶ、読み取り間隔は10sである。固有振動周期の数値解は487s、362s、287s・・・であり、順位1では両者はよい一致を示している。なお、観測結果は一層状態と二層状態ある場合両方を含んでいるが、結果に違いがみられない。固有周期の数値解でも同様の結果となっている。また、セイシュの最大振幅は諏訪湖と同程度である。

次に、表2に変水層の水温変化の周期、つまり内部面の振動周期の観測値をその固有周期の数値解と供に示す。この結果のデータ数は1000-1400ヶ、読み取り間隔は120sである。一方、固有周期の計算データとして内部面までの水深は10.3mと固定し、水温は観測値より9/11-9/26の順に上層で24.4、23.4、22.0℃、下層で5.8、5.9、6.0℃とした。なお、固有周期の計算に於て内部面が水底に達しない水深の浅い水域には、層厚の小さい下層を水底に考え、全水域を二層状態にしている。観測値と計算値はほぼ一致している。

表1 水面の振動周期(sec)

	月 日	順位 1	順位 2
諏訪湖	10/22	1370	694
	11/17	1351	746
野尻湖	8/6	476	345
	9/26	500	333
	9/26	490	333
	11/25	490	355

表2 野尻湖の内部面振動周期(min)

	月 日	順位 1	順位 2
観測値	9/11	227	
	9/17	225	
	9/26	222	
計算値	9/11	225	162
	9/17	223	161
	9/26	240	173

参考文献

- 1) T.Taylor, B.S.Patil and O.C.Zienkiewicz: Harbour Oscillation; A Numerical Treatment for Undamped Natural modes, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol 43,1969, pp.141-145.