II-256　オペレータ・スプリッテッング法による湖沼の流れの３次元的解析法

京都大学大学院　学生員　広瀬　昌由
京都大学工学部　正　員　岩佐　義朗
京都大学大学院　学生員　申　　輝華

<u>１．はじめに：</u>　本研究は、湖沼における流れを３次元的に数値解析することを目的とするので、本報ではその計算手法として、中規模程度以上の流れ、あるいは比較的周期の長い流れを扱う場合に有効と考えられるオペレータ・スプリッテッング法について述べる。

<u>２．基礎式：</u>　浅水近似およびブシネスク近似を用いると、連続方程式、各方向の運動方程式及び密度方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(uu)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z}=fv-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_h\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_h\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial(vu)}{\partial x}+\frac{\partial(vv)}{\partial y}+\frac{\partial(vw)}{\partial z}=-fu-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_h\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_h\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial v}{\partial z}\right)\ ,\quad 0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(u\Delta\rho)}{\partial x}+\frac{\partial(v\Delta\rho)}{\partial y}+\frac{\partial(w\Delta\rho)}{\partial z}=Q+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_h\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_h\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_v\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial z}\right)$$

ここで各変数は慣例にしたがうものとする。（図１参照）

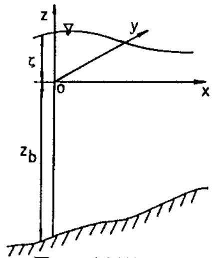

図１：座標軸の定義

<u>３．計算手法と離散化</u>

<u>(1)オペレータ・スプリッテッング法：</u>上述の流れの基礎式を差分法によって数値解析するとき、周知のように時間に関して未知数が陽に解かれるexplicit法と、陰に解かれるimplicit法がある。前者は計算の安定性のため、時間差分を比較的小さくとらなければならないので、中規模以上の流れ、あるいは長周期の流れに対しては計算時間が膨大なものとなる。それに対して後者は、大きな時間ステップが許容されるが、１回のステップに繰り返しの収束計算が含まれていることが多いので、やはり計算時間が長くなる。本報で用いられるオペレータ・スプリッテッング法は、このような問題を考慮した上で、１つの時間ステップをいくつかの段階に分け、それぞれの段階で考慮される項の性質に応じた適切な差分式を用いるもので、部分的にimplicit法が適用されるが２重掃出し法などによって収束計算を避けて全体の計算時間の短縮を図る方法である（Yanenko[1)]）。本報では、運動方程式における各項の大きさ、計算上の安定性を考慮して、１つの時間ステップを３つの段階に分別する。つまり

$$\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{X^{n+1}-X^{**}}{\Delta t}+\frac{X^{**}-X^{*}}{\Delta t}+\frac{X^{*}-X^{n}}{\Delta t}$$

とする。ここでXは任意の従属変数であり、添字(n+1)およびnはそれぞれ時間(n+1)ΔtおよびnΔtの量であり、*および**は中間変量を示す。

<u>(2)差分化：</u>運動方程式の中で最も影響の大きい項は圧力項であり、計算上の不安定の問題をもたらす項は移流項である。そのために移流項と圧力項を、切り離して独立に取り扱うことが好ましいと考えられる。また、水平方向の渦動粘性項は、流れに貢献する分は小さいにもかかわらず、計算の安定には大きな役割を果たすので移流項と同じ段階で扱い、計算の安定を図る。鉛直方向の速度勾配は通常水平方向のそれに対してかなり大きいので、鉛直方向の渦動粘性項は水平方向のそれより重要であり、コリオリ項とともに、別の段階で扱うものとする。以上より、基礎方程式を以下のように３段階に分割する。

＜第１段階＞ｘおよびｙ方向の運動方程式については、すべての移流項と水平方向の渦動粘性項を取り

入れ、密度方程式については、移流項および拡散項のすべての項を取り入れる。この段階においては、時間に関して２次精度を持つexplicitなAdams-Bashforth法を用いる。（以下水平方向に関してはｘ方向のみを記す。）

$$\frac{u^{*}-u}{\Delta t}=\frac{3}{2}F^{n}-\frac{1}{2}F^{n-1} \quad \text{ただし} \quad F^{n}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{h}\frac{\partial u^{n}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_{h}\frac{\partial u^{n}}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial (uu)^{n}}{\partial x}+\frac{\partial (uv)^{n}}{\partial y}+\frac{\partial (uw)^{n}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\Delta\rho^{n+1}-\Delta\rho^{n}}{\Delta t}=\frac{3}{2}M^{n}-\frac{1}{2}M^{n-1} \quad \text{ただし} \quad M^{n}=Q+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{h}\frac{\partial (\Delta\rho)^{n}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{h}\frac{\partial (\Delta\rho)^{n}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{v}\frac{\partial (\Delta\rho)^{n}}{\partial z}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial (u\Delta\rho)^{n}}{\partial x}+\frac{\partial (v\Delta\rho)^{n}}{\partial y}+\frac{\partial (w\Delta\rho)^{n}}{\partial z}\right)$$

ここで、拡散項には中心差分スキーム、移流項に対しては加重上流差分スキームを用いる。以上より、$u^{*}, v^{*}, \Delta\rho^{n+1}$が求められる。このスキームは、時間に関して２次の精度を持つとともに、空間的にも２次精度を有する。

＜第２段階＞ｘ方向およびｙ方向の運動方程式の鉛直渦動粘性項およびコリオリ項を取り入れることにし、implicitなCrank-Nicholson法によって次のように差分化する。

$$\frac{u^{**}-u^{*}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(A_{v}\frac{\partial u^{**}}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_{v}\frac{\partial u^{*}}{\partial z}\right)\right\}+f v^{*}$$

この方程式の係数行列は、３重対角行列であるので２重掃出し法を用いれば、繰り返し計算によることなく、u^{**}, v^{**}を求めることができる。この段階で用いたCrank-Nicholson法は、時間に関して前進差分、空間に関して中心差分をとっているが、時間に関しては、あたかも時間*と**での平均をとり実効中心差分で評価しているので、空間に関しても時間に関しても２次の精度を持つ。

＜第３段階＞連続方程式と運動方程式の圧力項を取り入れる。すなわち、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad \frac{u^{n+1}-u^{**}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho_{0}}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

上の運動方程式と水深方向に積分した次の連続方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-\int_{z_{0}}^{\zeta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz$$

を用いて水位ζに関する方程式を求めると、次のようなPoisson型の方程式が得られる。

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^{n}}{\Delta t}+A\left(\frac{\partial^{2}\zeta^{n+1}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\zeta^{n+1}}{\partial y^{2}}\right)=FF$$

ここで、ＡおよびＦＦは先の段階までの量を用いて計算される既知量である。このPoisson型方程式はいくつかの方法で解くことができるが、本報ではここでもオペレータ・スプリッテング法を用いて解くことにする。つまり、$\tilde{\zeta}$を中間変量とすると上式は、

$$\frac{\tilde{\zeta}-\zeta^{n}}{\Delta t}+A\frac{\partial^{2}\tilde{\zeta}}{\partial x^{2}}=0, \quad \frac{\zeta^{n+1}-\tilde{\zeta}}{\Delta t}+A\frac{\partial^{2}\zeta^{n+1}}{\partial y^{2}}=FF$$

となり、この方程式をやはり２重掃出し法によって解くことができ、水位ζ^{n+1}を求めることができる。水位が求まれば、鉛直方向の運動方程式より圧力が、さらに水平方向の運動方程式を用いて、u^{n+1}, v^{n+1}が求まり、最後に連続式よりw^{n+1}を求めることができる。

４．おわりに： 以上のようにして３段階を１つのステップとして計算を進めるのがオペレータ・スプリッテング法であり、従来の計算法に比べて計算時間が短くなることが期待される。

《参考文献》(1)Yanenko,N.N.;The Method of Fractional Steps for Solving Multi-Dimensional Problems of Mathematical Physics , Springer-Verlag , 1971