

## II-254 塩水くさびの淡塩境界面における 移流拡散の重み付差分法解析

九州産業大学 正員 加納正道  
九州産業大学 正員 赤坂順三  
東 和 大学 正員 空閑幸雄

**1. まえがき** 筆者らはこれまでに、被圧滞水層内における塩水くさび拡散問題解析にあたり、浸透層内の塩水くさび領域と淡水領域を同一重み付差分モデルで解析してきた<sup>1), 2)</sup>。しかし、塩水くさびが形成されたとき、淡塩境界面上での淡水および塩水の流れの状況を把握するため実験を行ったところ、塩水くさび内部では流速は小さく拡散が卓越すると考えられ、また淡塩境界面上では濃度(c)と、淡塩境界面に対する法線方向のフラックス(q<sub>n</sub>)は小さい(即ちc≠0, q<sub>n</sub>≠0)と考えられる。そこで本報では、移流拡散方程式の解法にあたり、淡塩境界面での物質収支を検討するために淡塩境界形状に合わせた格子に分割し、時間刻みの1段の間に1/2の分数段を設けて拡散と移流の効果を分離させる、分数段階法的重み付差分法の定め方と移流方程式の重み付差分法の精度検証の結果の一部を示す。

**2. 基礎式** 被圧滞水層内における塩水くさび近傍の浸透流と拡散について図1に示すx, yの二次元直交座標系および、淡塩境界法線方向(n)と、接線方向(s)の座標系で基礎式を考えれば、式(1)、式(2)のように示すことができる。

$$\text{浸透流方程式} : D_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_2 \frac{\rho}{\rho_f} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{移流拡散方程式} : \frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - u_1 \frac{\partial c}{\partial n} - u_2 \frac{\partial c}{\partial s} \quad (2)$$

ここに、D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>: 透水係数、H: 圧力水頭、ρ: 流体の密度、ρ<sub>f</sub>: 淡水の密度、c: 塩分濃度、u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>: n, s方向の実流速、d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>: n, s方向の拡散係数である。なお、密度ρと濃度cとの関係は、式(3)で表わす。

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f) \cdot c \quad (3)$$

また、移流拡散方程式を分数段階法で求めるために、拡散方程式(4)と移流方程式(5)を次のように考える。

$$\frac{\partial c}{\partial t} \left( = \frac{c^{k+1/2} - c^k}{\Delta t} \right) = d_1 \frac{\partial^2 c^{(k, k+1/2)}}{\partial n^2} + d_2 \frac{\partial^2 c^{(k, k+1/2)}}{\partial s^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \left( = \frac{c^{k+1} - c^{k+1/2}}{\Delta t} \right) = -u_1 \frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial n} - u_2 \frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial s} \quad (5)$$

$$\frac{c^{k+1/2} - c^k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n P_i c^{(k \text{ or } k+1/2)} \quad (6)$$

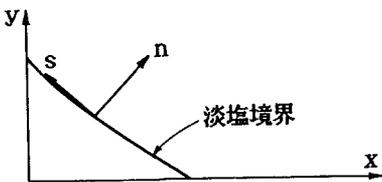


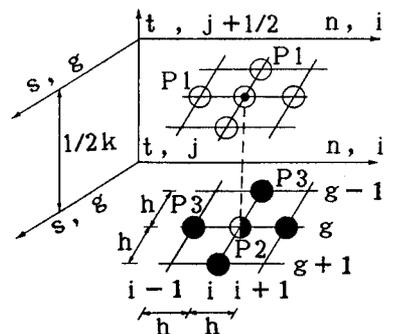
図1 座標表示

$$\frac{c^{k+1} - c^{k+1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^n Q_j c^{(k+1/2 \text{ or } k+1)} \quad (7)$$

$$c^{(r)} = \sum_{i=0}^{r/2} \left[ \frac{(n+s)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{\{(d_1+d_2)t\}^i}{i!} \right] \quad (8)$$

**3. 重み付差分法の定め方** 浸透流方程式の重み付差分法の定め方は、前報に述べた方法による<sup>1), 2)</sup>。つぎに、分数段階法による移流拡散方程式の重み付差分式(6)、(7)を求める方法を以下に示す。

まず、重み付差分式(6)は、例えば図2の差分モデルで解析を行うと、浸透流方程式同様に濃度c<sup>k</sup>を既知として次のようにして求められる。いま、式(4)を満足する多項式は式(8)で示



◎: 考える点, ○: 未知点, ●: 既知点

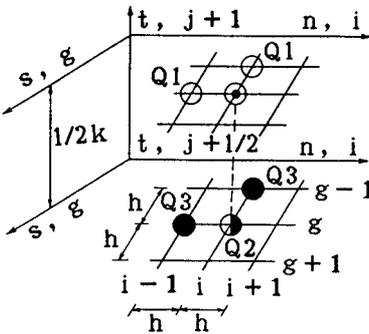
図2 二次元拡散差分モデル

される。ここで、 $n, s, t$ の増分をそれぞれ $\Delta n = \Delta s = h, \Delta t = 1/2k$ として、 $x = p_1 h, y = p_2 \cdot h, t = 1/2q k$ と離散化をほどこす。図2のPiで示すような9点、3種類の近接点で差分モデルを考える場合に差分式は式(9)のように示される。そこで原点をP2の点に移し、式(8)において $r = 0, 2, 4$ として得られる $c^{(r)}$ の値を式(9)に代入すれば重み $P1, P2, P3$ の係数を決定する連立方程式(10)が得られる。求めた重み $P1, P2, P3$ から式(9)の重み付差分式を解いて $k/2$ 時刻後の濃度 $c^{(k/2)}$ が求まる。ここに、 $\mu_*$ は無次元拡散係数である。

$$c(i, g, j+1/2) = P1\{c(i-1, g, j+1/2) + c(i, g-1, j+1/2) + c(i+1, g, j+1/2) + c(i, g+1, j+1/2)\} + P2 \cdot c(i, g, j) + P3\{c(i-1, g, j) + c(i, g-1, j) + c(i+1, g, j) + c(i, g+1, j)\} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 4(1+\mu_*) & 0 & 4 \\ 4+24\mu_* & 0 & 4 \\ +12\mu_*^2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_* \\ 3\mu_*^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

つぎに、重み付差分式(7)は、得られた濃度 $c^{(k/2)}$ を既知として図3の差分モデルで解析を行う。まず、式(5)を満足する多項式(11)が得られる。いまQ2の点に原点を移し、拡散項の重み付差分法同様離散化をほどこし、例えば図3に示す3種類5点における差分モデルを考えると、式(12)のように表わされる。さらに式(11)において、 $r = 0, 1, 2$ として求めた $c^{(r)}$ の値を重み付差分式(12)に代入して連立方程式(13)を求め、これを解いてQ1, Q2, Q3の重みを定め、式(12)より二次元移流拡散方程式の $(k+1)$ 時刻後の濃度 $c^{(k+1)}$ を求めることができる。



$$c^{(r)} = \sum_{i=0}^r [ (-1)^i \frac{(n+s)^{r-i}}{(r-i)!} \cdot \frac{\{(u_1+u_2)t\}^i}{i!} ] \quad (11)$$

$$c(i, g, j+1) = Q1\{c(i-1, g, j+1) + c(i, g-1, j+1)\} + Q2 \cdot c(i, g, j+1/2) + Q3\{c(i-1, g, j+1/2) + c(i, g-1, j+1/2)\} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4+4F_* & F_* & 4+2F_* \\ 8+16F_* & F_*^2 & 8+8F_* \\ +8F_*^2 & & +2F_*^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2F_* \\ 4F_*^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

◎: 考える点, ○: 未知点, ●, ○: 既知点

$$c(x, y, t) = \frac{M}{4\pi\rho t\sqrt{d_1d_2}} \text{EXP} \left[ -\frac{1}{4t} \left\{ \frac{(x-u_1t)^2}{d_1} + \frac{(y-u_2t)^2}{d_2} \right\} \right] \quad (14)$$

図3 二次元上流型移流差分モデル

**4. 二次元移流方程式の重み付差分法の精度** 二次元上流型移流重み付差分式(12)の精度検証を、二次元線源瞬間放流問題の理論式(14)と比較した結果を表1に示す。ここでは、浸透層内の流速は非常に小さいので無次元流速( $F_*$ ) $=0.1 \times 10^{-4}, 10^{-2}$ の場合について、時間刻み $100 \Delta t$ まで計算を行った。

表1 移流方程式のWFDM解と精度(例:  $1.1E-4=1.1 \times 10^{-4}$ )

$F_*$	時間	理論解	WFDM	絶対誤差
$0.1 \times 10^{-4}$	$20 \Delta t$	0.96597E+0	0.96596E+0	0.70648E-5
	$100 \Delta t$	0.96601E+0	0.96597E+0	0.35324E-4
$0.1 \times 10^{-2}$	$20 \Delta t$	0.96692E+0	0.96622E+0	0.70680E-3
	$100 \Delta t$	0.97068E+0	0.96715E+0	0.35312E-2

参考文献

- 1) 加納・空閑・赤坂; 重み付差分法による塩水くさびの拡散解析、第42回年講第2部
- 2) 加納・空閑・赤坂・細川; 塩水くさびの拡散問題への重み付差分法の実用、昭和62年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集