

東 和 大学 正員○空閑幸雄

2. 基礎式 被圧滞水層内における塩水くさび近傍の浸透流と拡散について図1に示す x , y の二次元直交座標系および、淡塩境界法線方向 (n) と、接線方向 (s) の座標系で基礎式を考えれば、式(1)、式(2)のように示すことができる。

$$\text{浸透流方程式} : D_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_2 \frac{\rho}{\rho_f} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{移流扩散方程式: } \frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - u_1 \frac{\partial c}{\partial n} - u_2 \frac{\partial c}{\partial s} \quad (2)$$

ここに、 D_1, D_2 : 透水係数、 H : 圧力水頭、 ρ : 流体の密度、 ρ_f : 淡水の密度、 c : 塩分濃度、 u_1, u_2 : n, s 方向の実流速、 d_1, d_2 : n, s 方向の拡散係数である。なお、密度 ρ と濃度 c との関係は、式 (3) で表わす。

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f) \cdot c \quad (3)$$

$$\rho = \rho_f + (\rho_a - \rho_f) \cdot c \quad (3)$$

また、移流拡散方程式を分数段階法で求めるために、拡散方程式(4)と移流方程式(5)を次のように考える。

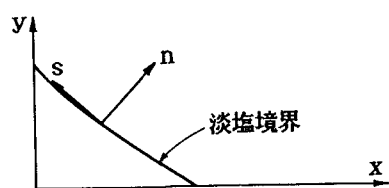


图1 座標表示

$$\frac{\partial c}{\partial t} \left(= \frac{c^{k+1/2} - c^k}{\Delta t} \right) = d_1 \frac{\partial^2 c^{(k, k+1/2)}}{\partial n^2} + d_2 \frac{\partial^2 c^{(k, k+1/2)}}{\partial s^2} \quad (4)$$

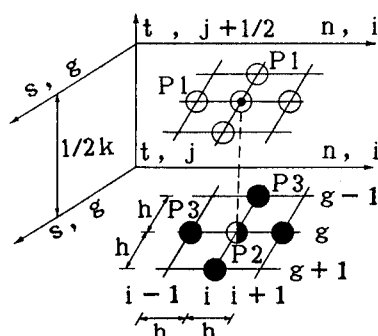
$$\frac{\partial c}{\partial t} \left(= \frac{c^{k+1} - c^{k+1/2}}{\Delta t} \right) = -u_1 \frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial n} - u_2 \frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial s} \quad (5)$$

$$\frac{c^{k+1/2} - c^k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n P_i c^{(k \text{ or } k+1/2)} \quad (6)$$

$$\frac{c^{k+1} - c^{k+1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^n Q_j c^{(k+1/2 \text{ or } k+1)} \quad (7)$$

$$c^{(r)} = \sum_{i=0}^{r/2} \left[\frac{(n+s)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{\{(d_1+d_2)t\}^i}{i!} \right] \quad (8)$$

まず、重み付差分式(6)は、例えば図2の差分モデルで解析を行うと、浸透流方程式同様に濃度 c^k を既知として次のようにして求められる。いま、式(4)を満足する多項式は式(8)で示



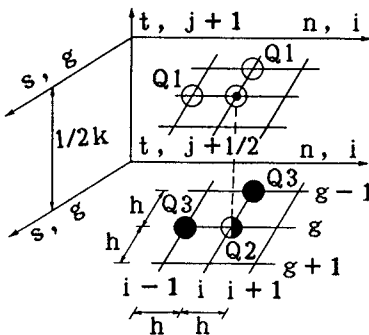
◎：考える点，○：未知点，●、①：既知点

される。ここで、 n, s, t の増分をそれぞれ $\Delta n = \Delta s = h, \Delta t = 1/2k$ として、 $x = p_1 h, y = p_2 \cdot h, t = 1/2q k$ と離散化をほどこす。図2の P_i で示すような9点、3種類の近接点で差分モデルを考える場合に差分式は式（9）のように示される。そこで原点を P_2 の点に移し、式（8）において $r = 0, 2, 4$ として得られる $c^{(r)}$ の値を式（9）に代入すれば重み P_1, P_2, P_3 の係数を決定する連立方程式（10）が得られる。求めた重み P_1, P_2, P_3 から式（9）の重み付差分式を解いて $k/2$ 時刻後の濃度 $c^{(k/2)}$ が求まる。ここに、 μ_* は無次元拡散係数である。

$$c(i, g, j+1/2) = P_1 \{ c(i-1, g, j+1/2) + c(i, g-1, j+1/2) + c(i+1, g, j+1/2) + c(i, g+1, j+1/2) \} + P_2 \cdot c(i, g, j) + P_3 \{ c(i-1, g, j) + c(i, g-1, j) + c(i+1, g, j) + c(i, g+1, j) \} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 4(1+\mu_*) & 0 & 4 \\ 4+2\mu_* & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_* \\ 3\mu_*^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

つぎに、重み付差分式（7）は、得られた濃度 $c^{(k/2)}$ を既知として図3の差分モデルで解析を行う。まず、式（5）を満足する多項式（11）が得られる。いま Q_2 の点に原点を移し、拡散項の重み付差分法同様離散化をほどこし、例えば図3に示す3種類5点における差分モデルを考えると、式（12）のように表わされる。さらに式（11）において、 $r = 0, 1, 2$ として求めた $c^{(r)}$ の値を重み付差分式（12）に代入して連立方程式（13）を求め、これを解いて Q_1, Q_2, Q_3 の重みを定め、式（12）より二次元移流拡散方程式の $(k+1)$ 時刻後の濃度 $c^{(k+1)}$ を求めることができる。



$$c^{(r)} = \sum_{i=0}^r \left[(-1)^i \frac{(n+s)^{r-i}}{(r-i)!} \cdot \frac{\{(u_1+u_2)t\}^i}{i!} \right] \quad (11)$$

$$c(i, g, j+1) = Q_1 \{ c(i-1, g, j+1) + c(i, g-1, j+1) \} + Q_2 \cdot c(i, g, j+1/2) + Q_3 \{ c(i-1, g, j+1/2) + c(i, g-1, j+1/2) \} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4+4F_* & F_* & 4+2F_* \\ 8+16F_* & F_*^2 & 8+8F_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2F_* \\ 4F_*^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

◎：考える点，○：未知点，●，●：既知点

$$c(x, y, t) = \frac{M}{4\pi\rho t\sqrt{d_1d_2}} \text{EXP} \left[-\frac{1}{4t} \left\{ \frac{(x-u_1t)^2}{d_1} + \frac{(y-u_2t)^2}{d_2} \right\} \right] \quad (14)$$

図3 二次元上流型移流差分モデル

4. 二次元移流方程式の重み付差分法の精度 二次元上流型移流重み付差分式（12）の精度検証を、二次元線源瞬間放流問題の理論式（14）と比較した結果を表1に示す。ここでは、浸透層内の流速は非常に小さいので無次元流速 $(F_*) = 0.1 \times 10^{-4}, 10^{-2}$ の場合について、時間刻み $100 \Delta t$ まで計算を行った。

表1 移流方程式のWFDM解と精度(例: $1.1 \times 10^{-4} = 1.1 \times 10^{-4}$)

参考文献

- 1) 加納・空閑・赤坂；重み付差分法による塩水くさびの拡散解析、第42回年講第2部
- 2) 加納・空閑・赤坂・細川；塩水くさびの拡散問題への重み付差分法の実用、昭和62年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集

F_*	時間	理論解	WFDM	絶対誤差
0.1×10^{-4}	$20 \Delta t$	0.96597E+0	0.96596E+0	0.70648E-5
	$100 \Delta t$	0.96601E+0	0.96597E+0	0.35324E-4
0.1×10^{-2}	$20 \Delta t$	0.96692E+0	0.96622E+0	0.70680E-3
	$100 \Delta t$	0.97068E+0	0.96715E+0	0.35312E-2