

II-253

一般曲線座標系による流れと水質混合特性の平面2次元数値解析

京都大学大学院 学生員 井上 智夫
 京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
 京都大学工学部 正 員 綾 史郎

1. はじめに; 本研究は、複雑な地形形状を有する水域の流れと水質混合特性を解析することを目的として、一般曲線座標系を用いた平面2次元解析モデルの開発を行い、数値解析的研究を行おうとするものである。本報では、平面2次元流れの運動量方程式、連続式および移流分散方程式からなる数学モデルを一般曲線座標系で記述するとともに、その離散式を誘導した。さらに、簡単なモデル水域にそれらを適用して、数値解析を実行することにより、数学モデル、計算コードの適切性について示した。

2. 基礎方程式系およびその離散化;

(1) 基礎方程式系; 本研究で対象とする流れは、 x_3 軸(鉛直)方向に水理量の変化の小さい、一様な密度の流れである。通常のデカルト座標系における3次元の Reynolds方程式、乱流拡散方程式を鉛直積分し、平面2次元流れにおける基礎方程式系を得た後、これを一般曲線座標系

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2), \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2) \quad (1)$$

上のそれに改めると、以下の式を得る¹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \zeta \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U^1}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \zeta \\ N \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U^2}{J} \right) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \zeta \\ N \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau_{11}^1 \\ \tau_{21}^1 \\ 0 \\ S^1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h}{J} \right) \begin{Bmatrix} \tau_{12}^2 \\ \tau_{22}^2 \\ 0 \\ S^2 \end{Bmatrix} - \frac{gh}{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{1}{J} \begin{Bmatrix} \tau_{b1} \\ \tau_{b2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 M_i : x_i 軸方向の運動量束 ($= \int_{z_b}^{\zeta} u_i dx_3$), ζ : 水位, z_b : 水路床高さ, h : 水深 ($= \zeta - z_b$), U_i : 水深平均流速 ($= M_i/h$), N : 質量束 ($= \int_{z_b}^{\zeta} c dx_3$), τ_{bi} : 水路床における x_i 軸方向のせん断応力 J : 座標変換に関する Transformation Jacobian である。また、 U^i : 水深平均流速の反変ベクトル成分であって、

$$U^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} U_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

で定義され、 τ^{ij} , S^i は、それぞれ x_i 軸方向の(渦動粘性+分散)応力、勾配輸送型(乱流拡散+移流分散)質量フラックスを示しており、次式で定義される。

$$\begin{Bmatrix} \tau^{11} & \tau^{12} \\ \tau^{21} & \tau^{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \tau_{12}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \tau_{12} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \tau_{21} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \tau_{22}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \tau_{21} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \tau_{22} \end{Bmatrix} \quad (4) \quad S^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} S_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} S_2 \quad (5)$$

なお、(2)第1, 第2式は、各々 x_1, x_2 軸方向の運動量束 M_1, M_2 に関する運動量方程式であり、第3式は連続式、第4式は拡散量の保存を示す移流分散方程式である。また、(2)式において ξ_1 - ξ_2 座標系は、必ずしも直交する必要はない。

(2) 離散式の誘導; 離散式は、(2)を ξ_1 - ξ_2 座標系上において積分することによって求められる。局所的時間変化項については、 ξ_1 - ξ_2 座標系上において積分した後、Adams-Bashforth法により時間2次精度の離散式を得る。移流項については、2次精度風上差分法(Donor Cell法)、あるいは、武本ら²⁾による3次精度風上差分法(QUICK法)を用いる。渦動粘性項、分散項については、面積積分したのち、積分境界上での τ^{ij} , S^i を各々(4),(5)により、中心差分の考え方により求める。圧力項については、Staggered Scheme により離散化する。また、底面せん断力の評価には、Manning型の抵抗則を用いる。

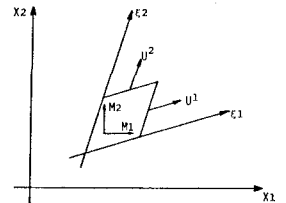


Fig.1 2つの座標系と変数の定義

3. 数値実験結果とその考察；

(1) 平面2次元流れの数値解析；Fig.2 に示すような湾曲したモデル河道に非正方形の格子網を生成し、流れ場を求めた。水理条件は、Manning の粗度係数 $n = 0.02$ 、勾配は ξ_1 軸方向に $1/5000$ 、 ξ_2 軸方向に 0 とし、上流端で流量-時間曲線、下流端で水位-時間曲線を与えた。初期条件は、静水状態として、正弦曲線により定常流量 ($1500\text{m}^3/\text{s}$)、定水位になめらかに接続することとし、時間発展を行い定常解を得た。得られた流速ベクトル図と等水位線図を示したものが、Fig.3 である（ただし、(2) 第1, 第2式において、移流項を省略した）。流速ベクトル図 (Fig.3(a)) より、流速ベクトルの向きは河道形状に沿ってなめらかに変化しており、流れのパターンはほぼ妥当なものと考えられるが、やや側岸部の影響が強くでているようである。これは、境界条件として、Non-Slip 条件を用いたことによる。

(2) 水質混合特性の数値解析；

(1) で求められた流れ場を対象として、上流端中央部において拡散物質が定常に投入されるような濃度場における濃度分布を、境界条件を一定として、時間発展を行い定常解を得た。ただし、分散係数は $D_L = 5.93\text{hu}$ 、 $D_T = 2.00\text{hu}$ を用いている。境界条件として、上流側境界では、階段関数形の濃度分布を、側岸部、下流側境界では、 $\partial C / \partial \xi_i = 0$ を与えた。2. で略示した計算コードは一般曲線座標系による非正方形格子網において十分正確な数値解を与えることがわかっており³⁾、この結果 (Fig.4(a),(b)) も妥当なものと考えられる。これらの図より、このような流れ場においては、拡散物質は横断方向にあまりひろがらないが、流下するにしたがって正規分布に近い形を呈することがわかる。

4. おわりに；本報文中で示した結果により、一般曲線座標系による非正方形格子網を用いた数値解析法について、その具体的手法と有用性について指針を得ることができた。モデル湾曲河道における流れ場と拡散解析の数値解析結果より、複雑な地形形状を有する実河川への適用の可能性が高められた。境界条件の設定法、離散化手法、および格子網の生成法の改善を図り、実河川における流れと水質混合解析への適用が今後の課題である。

- 《参考文献》1) 岩佐、綾、土屋、井上：昭和62年度土木学会関西支部年次学術講演会
2) Takemoto, Nakamura, Yamabe, Abe and Minami: Trans. JSIDE, No.121, 1986
3) 岩佐、綾、西内、馬場：昭和63年度土木学会関西支部年次学術講演会

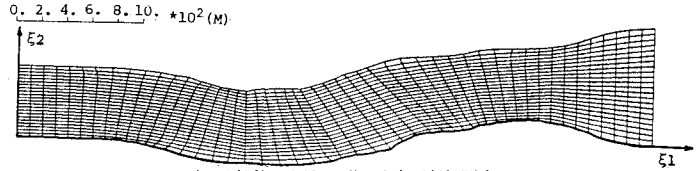


Fig.2 モデル湾曲河道と非正方形格子網

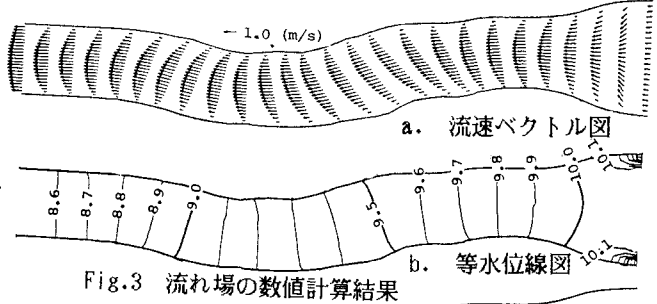


Fig.3 流れ場の数値計算結果

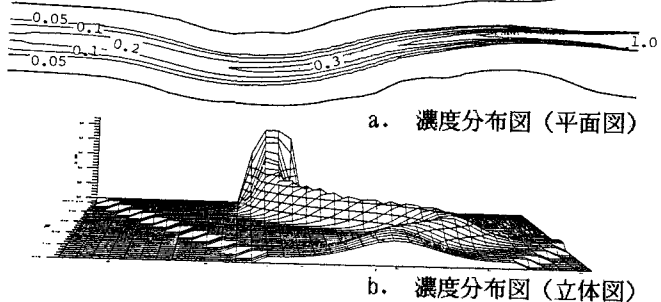


Fig.4 拡散現象の数値計算結果