II-252　移流拡散問題の数値解析における計算境界付近の取り扱い方について

佐賀大学理工学部　正　○　大串浩一郎
九州大学　工学部　正　　小松　利光
九州大学　工学部　正　　朝位　孝二

1．はじめに

移流拡散問題の有力な計算法として提案されたSplit-Operator-Approachは、異なる２種類の輸送形式であるadvectionとdiffusionを分離し、1 time step ごとに交互に計算を行なう近似解法である。この解法の長所は、各々のprocessに応じて最適な計算法を任意に選択できることである。

HollyとPreissmann(1977)[1]は、非常に精度の良い移流の計算法を提案したが、多次元への拡張に問題があった。小松ら(1984)[2]は、ほとんどH-P法と同じ精度で多次元への拡張が容易なｽｷｰﾑを提案した。更に彼らはｽｷｰﾑの改良を行い(1988)[3]、改良6ﾎﾟｲﾝﾄ･ｽｷｰﾑを提案した。このｽｷｰﾑは、計算誤差が非常に少なく、多次元への拡張も容易で、非常に実用的なｽｷｰﾑである。

しかし、このｽｷｰﾑは計算境界外の濃度を2点推定する必要がある為、境界付近の濃度が大幅に変化するとき果してどの程度の精度で計算が可能なのかを調べておく必要がある。本研究では、境界付近の濃度計算法について考察し、有力な推定法を提案するものである。

2．改良6ﾎﾟｲﾝﾄ・ｽｷｰﾑについて

特性曲線法に基づくこの計算法は、n time step における6個の計算格子点の既知の濃度を使って、次ステップ、すなわち(n+1) time step の $x=x_i$ における濃度を計算する手法である。詳細な誘導は文献2),3)に譲るが、基本的なｽｷｰﾑの形は以下の通りである。

$$C_i^{n+1} = \sum_{k=1}^{6} b_k \cdot C_{i+k-4}^{n} \tag{1}$$

ここに、$b_{1\sim6}$は、ｸｰﾗﾝ数α（$=U\Delta t/\Delta x$、U＝流速、Δx、Δt＝計算格子間隔）の関数である。

このｽｷｰﾑは、$x=x_{i-3}\sim x_{i+2}$の濃度Cの値を用いて、次の時間ｽﾃｯﾌﾟの$x=x_i$における濃度Cを求めるｽｷｰﾑであるから、もし、計算領域の境界付近に適用する時は、境界外に2点の濃度の推定点を設ける必要がある（図－1参照）。

3．境界付近の濃度の計算法

(a) 境界外に濃度を2点推定する場合（図－1）

境界外に濃度を推定する方法としては、既に文献2)に示しているように、境界で与えられる濃度変化の時系列データを利用して移流拡散方程式より求める方法がある。すなわち、

$$C_{-1}^{n} = \frac{\alpha+2}{\alpha^2} C_1^{n-2} - \frac{4(\alpha+1)}{\alpha^2} C_1^{n-1} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha^2} C_1^{n} \tag{2}$$

$$C_{0}^{n} = \frac{\alpha+1}{2\alpha^2} C_1^{n-2} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2} C_1^{n-1} + \frac{(2\alpha+1)(\alpha+1)}{2\alpha^2} C_1^{n} \tag{3}$$

(b) 境界内の濃度を2点別の方法で計算する場合（図－2）

境界付近においては、無理に改良6ﾎﾟｲﾝﾄ･ｽｷｰﾑを使わず他の推定法で境界内2点の次の時間ｽﾃｯﾌﾟの濃度を計算し、内部の広い計算領域において改良6ﾎﾟｲﾝﾄ･ｽｷｰﾑを適用しようという考え方も出てくるであろう。その場合の濃度の推定方法としては、差分化により求められた以下の推定式が有力である。すなわち、

$$C_i^{n+1} = C_{i-1}^{n} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\left(C_i^{n} - C_{i-1}^{n+1}\right) \qquad (\ i=2,3\ ) \qquad (4)$$

4．モ デ ル 計 算 例

上述の推定法(a)、(b)の精度を比較するため、純粋移流の１次元モデル計算を行なう。計算領域は、$0 \leqq x \leqq 11{,}800$(m)であり、格子間隔$\Delta x = 200$(m)とする。濃度の初期条件は、ピーク濃度10、標準偏差264m、中心の位置$x = 1{,}400$(m)のGauss型濃度分布である。この拡散物質が、無限長１次元水路を一定流速0.5m/sで下流に流される場合を考える。t=9,600(s)後の厳密解は、$x = 6{,}200$(m)に中心を持つ同じ形のGauss型濃度分布である。今、仮に$x = 3{,}800$(m)という地点において、時々刻々の濃度の変化を記憶しておき、次に改めて、この情報を境界条件として、計算領域$3{,}800$(m)$\leqq x \leqq 11{,}800$(m)において同様の初期条件の下に純粋移流の計算を行なうものとする。この計算の場合、上述のa)、b)の両方の推定法が適用できる。a)は、$x = 3{,}400$、$3{,}600$(m)の濃度の推定、b)は、$x = 3{,}800$、$4{,}000$(m)の濃度の計算をすることになる。計算結果は、図－3に示す通りで、ややa)の推定法が位相のずれが少ない。比較のため、境界の影響のない場合の移流計算結果も同図に示している。

5．結　論

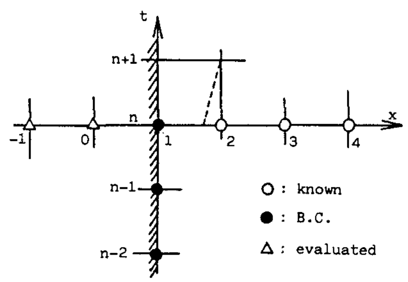
改良6ポイント・スキームにおいて必要だった境界外の２点の濃度の推定は、計算境界の時系列情報の使用によって可能となった。境界外に濃度を推定する方法と、計算領域内部の境界付近だけ別の手法で濃度を推定する方法を示した。前者は、後者より精度は良いと思われるが、過去の2time stepの境界条件を使う必要がある。後者は、精度的には少し劣るが、全く過去の情報は使う必要がないため、場合に応じて使い分けが可能である。

6．参 考 文 献

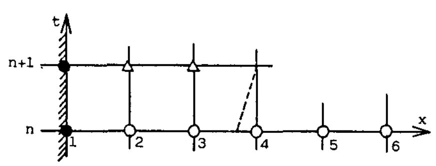
1) Holly,F.M.Jr. and A.Preissmann: Accurate calculation of transport in two dimensions,JHYD,ASCE,Vol.103,No.HY11,pp.1259-1277,1977.

2) Komatsu,T., F.M.Holly Jr., N.Nakashiki and K.Ohgushi : Numerical calculation of pollutant transport in one and two dimensions, JHHE, 3, No.2, pp.15-30, 1985.

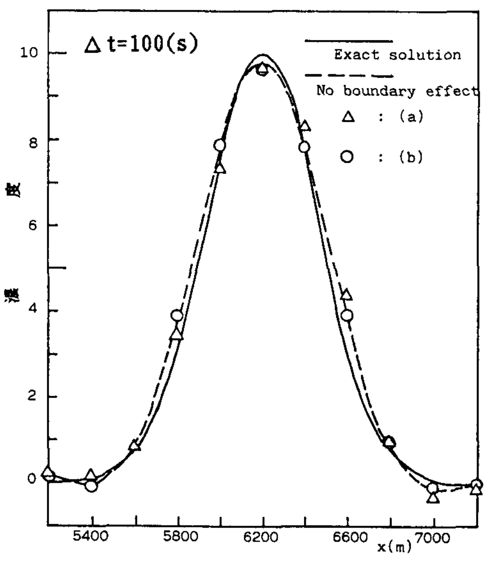
3) 小松、大串、朝位、仲敷：貯水池や河口部における移流拡散の高精度計算法、第32回水理講演会論文集、　pp.287-292、1988.



図－１　境界外の濃度の推定（(a)法）



図－２　境界内の濃度の推定（(b)法）



図－３　移流計算の比較（t=9,600(s)）