# II-251　移流方程式の高精度数値解法について

九州大学　工学部　正　員○朝位孝二
九州大学　工学部　正　員　小松利光
佐賀大学　理工学部　正　員　大串浩一郎

1．はじめに　河海や湖沼において passive な汚染物質の拡散の予測を行うには、移流拡散方程式を解く必要がある。数値的にこの方程式を解く場合 split operator approach は有効な手法である。この手法は、移流と拡散をそれぞれ最適な計算スキームを用いて各時間ステップごとに交互に計算を繰り返すものである。この手法では拡散は種々の差分法で精度よく計算できるのに対し、移流はかなりの誤差を伴う。小松ら[1]が提唱した 6-point scheme は移流を精度よく計算できるが多次元問題になると使用回数が飛躍的に増大するため精度は悪くなる。本研究では 6-point scheme に修正項を加えることによる精度の改善を検討した。

2．6-point scheme の修正　一次元の移流方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

式（1）を6-point schemeで計算すると打ち切り誤差のため次式のような数値拡散項が現れる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D_2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!\Delta t} + D_3\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!\Delta t} + D_4\frac{\partial^4 C}{\partial x^4}\frac{(\Delta x)^4}{4!\Delta t} + D_5\frac{\partial^5 C}{\partial x^5}\frac{(\Delta x)^5}{5!\Delta t} + \cdots \tag{2}$$

ここに、

$$D_2 = -3.16\times10^{-2}\alpha^2 + 3.16\times10^{-2}\alpha$$
$$D_3 = 4.74\times10^{-2}\alpha^2 - 4.74\times10^{-2}\alpha$$
$$D_4 = -\alpha^4 + 2\alpha^3 - 2.26\alpha^2 + 1.26\alpha$$
$$D_5 = \alpha^5 - 2.83\alpha^3 + 4.83\alpha^2 - 3.0\alpha, \quad \alpha = U\Delta t/\Delta x$$

式（2）の右辺が数値拡散項であるが、この項は無限に続くので単純にこの項を差し引くことはできない。

数値拡散項の特性を詳細に調べると、偶数次の項は振幅に関する誤差を生じさせる性質を持ち、奇数次の項は位相誤差を生じさせて歪を引き起こすことがわかった。そこで、無限に続く誤差項をその筆頭項である２次の数値拡散項と準筆頭項である３次の数値拡散項で代表させることにする。

$$\text{式（2）の右辺} \sim \gamma D_2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!\Delta t} + aD_3\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!\Delta t} \tag{3}$$

ここに、

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\omega}{|\omega|} & (\omega \neq 0) \\ 0 & (\omega = 0) \end{cases} \qquad a = 0.275$$

$$\omega = (-\partial C/\partial x \cdot \partial^2 C/\partial x^2 \cdot \partial^4 C/\partial x^4 \cdot \partial^5 C/\partial x^5)$$

よって修正された6-point schemeが得られる[2]。

$$C_i^{n+1} = C_\xi^n = b'_1 C_{i-3}^n + b'_2 C_{i-2}^n + b'_3 C_{i-1}^n + b'_4 C_i^n + b'_5 C_{i+1}^n + b'_6 C_{i+2}^n \tag{4}$$

3．減衰ファクター$S_f$の決定　von Neumannの安定解析を用いて式（4）の安定性を検討したところ高波数側で解の増幅率がわずかに１を越えていることが判った。つまりこのスキームは繰り返し計算回数が多くなると解が不安定になる。不安定化の原因は２次の修正項にあると考えられるので、計算の繰り返しに従って減衰するファクター$S_f$を導入した。$S_f$は次の手順で決定した。

計算条件がΔx＝２００m、Δt＝１００secであり、初期条件はピーク濃度C＝１０、標準偏差$\sigma$＝２６４m（$\sigma$／Δx＝１．３２）のガウス型濃度分布を流速０．５m/secで９６００秒間移流させる。4 time stepごとにピーク値と格子点が一致するので、そのたびごとにピーク値が１０付近に留まるようにトライアルで$S_f$の値を決めた。その結果が図－１である。$\sigma$＝１７０m（$\sigma$／Δx＝０．８５）、$\sigma$＝３９６m（$\sigma$／Δx＝１．９８）のガウス型濃度分布に対する$S_f$の結果も併せて図－１に示す。

$\sigma$／Δxが小さい場合は離散量として取り扱う数値計算では精度のよい結果を得ることは本質的に難しい。また$\sigma$／Δxが大きい場合は自動的に精度は向上する。そこで補正の対象とする$\sigma$／Δxを中間的な１．３２程度とした。従って、図－１より$\sigma$／Δx＝１．３２に対する$S_f$を次のように回帰した。

$$S_f = \frac{23.6}{(N+18.7)^{0.758}} \qquad (5)$$

ここに、　N：time step数（N=1,2,3,...）

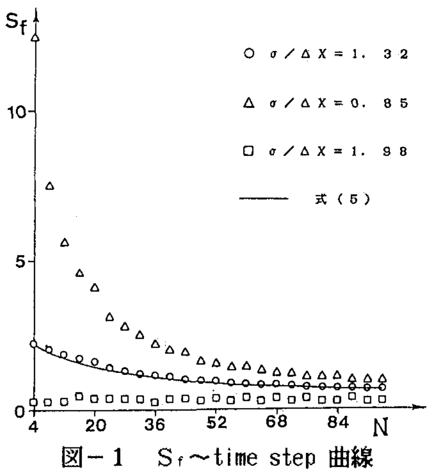
式（５）の$S_f$を２次の補正項に導入することにより、修正6-point schemeの係数は次のようになる。

$$b'_1 = b_1 + \alpha a D_3/12$$
$$b'_2 = b_2 - \alpha \gamma S_f D_2/2 - (-1+3\alpha) a D_3/12$$
$$b'_3 = b_3 - (1-3\alpha)\gamma S_f D_2/2 - (1-\alpha) a D_3/6$$
$$b'_4 = b_4 - (-2+3\alpha)\gamma S_f D_2/2 + \alpha a D_3/6$$
$$b'_5 = b_5 - (1-\alpha)\gamma S_f D_2/2 - (-2+3\alpha) a D_3/12$$
$$b'_6 = b_6 - (1-\alpha) a D_3/12$$

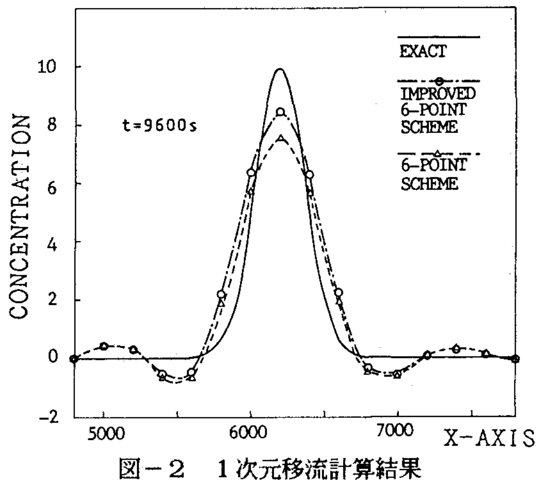
係数 $b_1$，$b_2$，‥‥ は文献 1）を参照されたい。

## ４．純粋移流のモデル計算

改良型6-point schemeを用いてモデル計算を行う。前述の計算条件で、また初期条件は、ピーク１０、標準偏差１７０m（$\sigma$／Δx＝０．８５）、ピークの中心がx＝１４００mの位置にあるガウス型濃度分布を用いて純粋移流の計算を行った。その結果を図－２に示す。$\sigma$／Δx＝０．８５は数値計算にとってかなり厳しい条件であるため、厳密解と較べダンピングや負値は避けられないが、従来の6-point schemeに比べて精度が大きく改善されている。



図－１　$S_f$～time step 曲線



図－２　１次元移流計算結果

## ５．参考文献


1）Komatsu,T.,Holly,F.M.Jr.,Nakashiki,N.and Ohgushi,K.（1985）. Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering,3,No.2,15-30

2）小松，大串，朝位，仲敷：貯水池や河口部における移流拡散の高精度計算法，第32回水講論文集