II-234　流速修正法による熱流体有限要素解析

中央大学理工学部　正　員　畑中勝守
中央大学理工学部　正　員　川原睦人

1．はじめに　非圧縮性粘性流体の流れ解析は、多くの工学分野において非常に重要な基本課題のひとつである。本研究は、粘性流体の流れ解析として、二次元非定常の熱連成流体の数値解析を行うものである。数値解析手法には、空間方向の離散化に有限要素法を、時間方向の離散化に流速修正法と陽的オイラー法を使用して定式化を行うものである。

2．基礎方程式　基礎方程式として流れを表す式にナビエ・ストークス式を、熱伝導を表す式にエネルギー方程式をそれぞれ無次元化して使用するものとする。バッキンガムのπ定理から、熱対流を考慮した無次元化を行う際にはプラントル数、レイリー数等の諸無次元量を流れの方程式中に考慮する必要があることから、本解析ではプラントル数とレイリー数を使用する。以上より、基礎方程式は次のようである。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} - \sigma_{ij,j} - \mathrm{Pr}\,Ra\,\theta\,f_i = 0, \qquad in\ V \tag{1}$$

$$v_{i,i} = 0, \qquad in\ V \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_j \theta_{,j} - \theta_{,jj} = 0, \qquad in\ V \tag{3}$$

ここに、v_iは流速、θは温度、Prはプラントル数、Raはレイリー数であり、応力テンソルσ_{ij}は、

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mathrm{Pr}\,d_{ij} \quad , \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \qquad (4),\ (5)$$

である。また、$\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\alpha}$　，　$Ra = \dfrac{\beta g \Delta\theta^* L^3}{\nu\alpha}$　である。ここに、Pは圧力、νは動粘性係数、αは熱拡散率、βは熱膨脹係数、gは重力加速度、Lは代表長さである。

3．流速修正法の適用　時間積分法には流速修正法を用いる。いま、無次元時間tを次式で表されるものと仮定する。

$$t^n = t^{n-1} + \Delta t. \tag{6}$$

次に、（6）式を用いて（1）式から中間流速$\tilde{v}_i^{n+1}$を次式で定める。すなわち、

$$\tilde{v}_i^{n+1} = v_i^n - \Delta t \left\{ v_j^n v_{i,j}^n - \mathrm{Pr}\left(v_{i,j}^n + v_{j,i}^n\right)_{,j} - \mathrm{Pr}\,Ra\,\theta^n f_i^n \right\} \tag{7}$$

$$\tilde{v}_i^{n+1} = \hat{v}_i, \qquad on\ S_1 \tag{8}$$

である。さて（7）式より計算された中間流速$\tilde{v}_i^{n+1}$は、圧力項を考慮していないため非圧縮の条件を満たしていない。そこで流速v_i^{n+1}を圧力p^{n+1}と中間流速$\tilde{v}_i^{n+1}$の関係から、

$$v_i^{n+1} = \tilde{v}_i^{n+1} - \Delta t\ p_{,i}^{n+1} \tag{9}$$

と定める。ここで（9）式の両辺に発散をとると、次式が得られる。

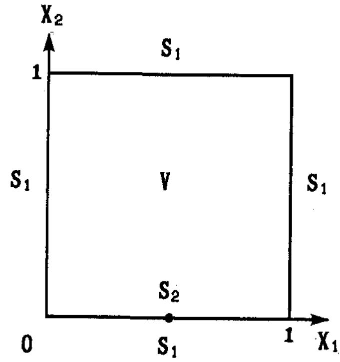
$$p_{,ii}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\,\tilde{v}_{i,i}^{n+1} \tag{10}$$

（10）式は$t = t^{n+1}$における圧力のポアソン方程式であり、これを解くための境界条件は、

$$p^{n+1} = \hat{p}, \qquad on\ S_2 \tag{11}$$

$$p_{,i}^{n+1}\,n_i = \hat{r}, \qquad on\ S_1 \tag{12}$$

である。以上で、（10）式より圧力p^{n+1}が求まり、流速v_i^{n+1}が（9）式より求まる。次にエネルギー方程式を陽的オイラー法を用いて次式より計算する。



図－1　座標系

$$\theta^{n+1} = \theta^{n} - \Delta t \left\{ v_j^n \theta^n_{,j} + \theta^n_{,jj} \right\} \tag{13}$$

$$\theta^{n+1} = \hat{\theta} \quad on\ S_1 \tag{14}$$

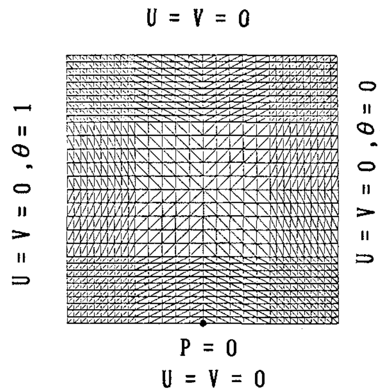
以下、これらの操作を繰返すことにより、時間積分を行う。

4．有限要素法の適用　　空間方向の離散化に、有限要素法を適用する。（７）、（８）、（９）、（10）式の左辺に重み関数を掛け、領域Ｖで積分し、重み付き残差方程式を誘導する。次に、ガレルキン法により有限要素方程式を導く。マトリックス表示された有限要素方程式は次の通りである。

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\, \tilde{v}^{n+1}_{\beta i} = \bar{M}_{\alpha\beta}\, v^n_{\beta i} - \Delta t \Big(K_{\alpha\beta\gamma j}\, v^n_{\beta j}\, v^n_{\gamma i} + S_{\alpha i \beta j}\, v^n_{\beta j} - N_\alpha \theta^n_\alpha f^n_i - \hat{\Omega}_{\alpha i} \Big) \tag{15}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\, v^{n+1}_{\beta i} = \bar{M}_{\alpha\beta}\, \tilde{v}^{n+1}_{\beta i} - \Delta t\, H_{\alpha i \beta}\, p^{n+1}_\beta \tag{16}$$

$$A_{\alpha\beta}\, p^{n+1}_\beta = - \frac{1}{\Delta t} H_{\alpha i \beta}\, \tilde{v}^{n+1}_{\beta i} + \hat{\Sigma}_\alpha \tag{17}$$



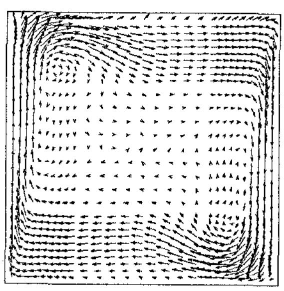
図－２　有限要素分割図
及び境界条件

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\, \theta^{n+1}_\beta = \bar{M}_{\alpha\beta}\, \theta^n_\beta - \Delta t \Big(K_{\alpha\beta\gamma j}\, v^n_{\beta j}\, \theta^n_\gamma + A_{\alpha i \beta j}\, \theta^n_\beta - \hat{\Sigma}_{1\alpha} \Big) \tag{18}$$

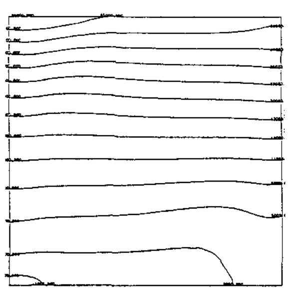
ここに、$\hat{\Omega}_{\alpha i}$ 、$\hat{\Sigma}_\alpha$ 、$\hat{\Sigma}_{1\alpha}$ はそれぞれ弱形式において２階微分の項を発散定理を用いて部分積分して得られた項であり、境界上での各フラックスを表す。

5．数値計算例　　数値解析例として一辺の無次元長さが１の正方形キャビティ内熱対流の解析を行った。計算に使用した境界条件は図－２に示す通りである。初期条件は、流速ｕ＝ｖ＝0 、圧力Ｐ＝0 、温度θ＝0.5 である。また、プラントル数 Pr ＝0.71、レイリー数 Ra ＝1.0 ×10^5 、微小時間増分 Δt ＝1.0 ×10^{-4} とした。

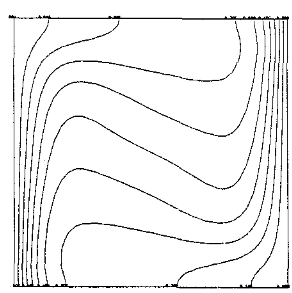
6．おわりに　　熱連成流体の解析としてキャビティ内の熱対流の計算を行った。解析結果から有限要素法と流速修正法の組合せによる定式化が有効であったと考えられる。しかし、キャビティ内流れでは境界上での各フラックスを既知（ゼロ）として与える事が可能であったが、流入出のある問題においては、この境界条件は適当ではないと思われる。従って、これらの問題に対しての境界条件の設定が今後の課題である。



図－３　流速図



図－４　圧力図



図－５　温度分布図

＜参考文献＞

1）有限要素法流体解析，川原睦人，日科技連出版，１９８５
2）M.Shimura and M.Kawahara:"Two Dimensional Finite Element Flow Analysis Using the Velocity Correction Method",JSCE,(to be published)