

II-215

二次元開水路における洪水波の特性について

山梨大学工学部 正会員 宮沢直季

山梨大学工学部 正会員 萩原能男

1. まえがき 河道における洪水流、堤内地の氾濫流の解析には、一般に流れ方向のみの変化を考える一次元解析法が用いられているが、実際にはこの種の流れの挙動を解析するには二次元的取り扱いが必要である。本研究は、二次元平面流れの基礎式に微小振幅波理論を適用し、様々なタイプの洪水波について、その波の波速と減衰性をフルード数等の水理量と関係づけるとともに波の伝播特性を調べることを目的とする。

2. 洪水波モデルの分類 二次元平面流れの基礎式を式(1)～(3)に示す。座標軸は水平面内に $x-y$ 軸をとる。ここに、 h は水深、 u, v は深さ方向に平均した x, y 軸方向の流速、 S_{0x}, S_{0y} は x, y 軸方向の河床勾配、 C はシェジの係数である。洪水波の伝播は、運動方程式の各項の力のつりあいによって、① kinematic wave $IV=0$ ② diffusion wave $III+IV=0$ ③ steady dynamic wave $II+III+IV=0$ ④ dynamic wave $I+II+III+IV=0$ ⑤ gravity wave $I+II+III=0$ のようなモデルに分類できる。ここで、 I は局所慣性項、 II は移流慣性項、 III は圧力項、 IV は(摩擦勾配+河床勾配)項である。

3. 解析方法 二次元平面流れの基礎式に対し、水深と流速を等流部分と等流からの変動部分とに分離し、変動量の2次微小量を無視すると、式(4)～(6)の変動量に対する線形方程式を得る。ここで、添字0は等流、 $(\cdot)$ の記号は等流からの変動量を示し、 m は定数(シェジ公式 $m=1$ 、マニング公式 $m=4/3$)、 $V_0^2 = u_0^2 + v_0^2$ である。また、 $\alpha_1 \sim \alpha_4$ は洪水波の種類によって0か1をとる。次に、水深、流速の変動成分を式(7)のように仮定する。ここで、 $(\cdot)$ の記号は変動振幅(複素数)を示し、 κ_x, κ_y は角波数 κ の x, y 成分、 $\omega = \omega_r + i \omega_i$ で ω_r は角周波数、 ω_i は時間的成長率を示す。式(7)を式(4)～(6)に代入すると、式(8)の未知数 $\hat{h}, \hat{u}, \hat{v}$ に関する同次連立方程式となり、この式が解をもつためには、係数行列式が0である必要がある。式(9)が洪水波の伝播を支配する特性方程式である。

4. 各洪水波の波速と減衰性 変動量の波速 c 、相対波速 c_r 、対数減衰度 δ は、式(10)～(12)で定義され、

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} - S_{0x} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} + \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} - S_{0y} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v'}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\frac{\alpha_1}{g} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{g} \left(u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \alpha_3 \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \alpha_4 S_{0x} \left(\frac{u'}{u_0} + \frac{u_0 u'}{V_0^2} + \frac{v_0 v'}{V_0^2} - m \frac{h'}{h_0} \right) = 0 \quad \dots (5)$$

$$\frac{\alpha_1}{g} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{g} \left(u_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \alpha_3 \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} + \alpha_4 S_{0y} \left(\frac{v'}{v_0} + \frac{u_0 u'}{V_0^2} + \frac{v_0 v'}{V_0^2} - m \frac{h'}{h_0} \right) = 0 \quad \dots (6)$$

$$h' = \hat{h} \exp \{ i (\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t) \} \quad u' = \hat{u} \exp \{ i (\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t) \} \quad \dots (7)$$

$$v' = \hat{v} \exp \{ i (\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t) \} \quad \dots (7)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (8) \quad \det |A| = 0 \quad \dots (9)$$

$$A_{11} = u_0 \kappa_x + v_0 \kappa_y - \omega \quad A_{12} = h_0 \kappa_x \quad A_{13} = h_0 \kappa_y$$

$$A_{21} = \alpha_1 \kappa_x i - \alpha_4 m \frac{S_{0x}}{h_0} \quad A_{22} = \alpha_2 \frac{u_0 S_{0x}}{V_0^2}$$

$$A_{23} = \alpha_2 \frac{u_0 \kappa_y}{g} i + \alpha_2 \frac{v_0 \kappa_x}{g} i + \alpha_4 \left(1 + \frac{u_0^2}{V_0^2} \right) \frac{S_{0x}}{u_0} - \alpha_1 \frac{\omega_i}{g}$$

$$A_{31} = \alpha_1 \kappa_y i - \alpha_4 m \frac{S_{0y}}{h_0} \quad A_{32} = \alpha_4 \frac{u_0 S_{0y}}{V_0^2}$$

$$A_{33} = \alpha_2 \frac{u_0 \kappa_x}{g} i + \alpha_2 \frac{v_0 \kappa_y}{g} i + \alpha_4 \left(1 + \frac{v_0^2}{V_0^2} \right) \frac{S_{0y}}{v_0} - \alpha_1 \frac{\omega_i}{g}$$

$$c = \frac{\omega_r}{\kappa} = \frac{\omega_r}{\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}} \quad \dots (10) \quad \delta = -2\pi \frac{\omega_i}{|\omega_r|} \quad \dots (11) \quad c_r = c - V_0 \cos r \quad \dots (12)$$

示した図である。図-2で実線は $\delta > 0$ で減衰

を表し、破線は $\delta < 0$ で増幅を表す。

また、図-3と図-4は、第2波（second wave）と第3波（third wave）の無次元相対波速と対数減衰度を示した図である。実線が第2波、破線が第3波である。これらの図から以下のことがわかる。波数領域には3つの明確な周波帯がある。波数の小さいところが kinematic 周波帯で、相対波速は波数とフルード数によって変化しない。この周波帯では、第1波の相対波速は漸近的に0.5の一定値に近づき、波数が小さいほど対数減衰度は0に近づくことから、この波が卓越する。このことは、kinematic wave の理論と対応する。また、波数の大きいところが gravity 周波帯で、相対波速はフルード数のみによって変化する。この周波帯では3つの波の相対波速は $\pm 1/F_0$ 、0の値に漸近し、波数が大きいほど対数減衰度は0に近づき、このことは表-1のように gravity wave の理論に対応する。波数の中間領域が dynamic 周波帯では、相対波速と対数減衰度は波数とフルード数によって変化する。次に、第2波、第3波の相対波速について見ると、ここでは示さなかったが、伝播方向角度が 0° のとき、第3波の相対波速は全てのフルード数と波数に対して0となり、第2波と第3波は完全に分離されるが、伝播方向が変化すると、第2波と第3波の間で乗り移りを生じる。このことは、特にフルード数が小さいところで顕著である。次に、対数減衰度について見ると、第1波は $F_0 < 2$ で減衰しながら伝播するのに対し、 $F_0 > 2$ で増幅しながら伝播する。 $F_0 = 2$ では波数、伝播角度に応じて減衰、増幅する。しかし、伝播方向 0° のときは、 $F_0 = 2$ で $\delta = 0$ となり、波は減衰も増幅もしない。また、第2波、第3波は全てのフルード数と波数に対して減衰する。

5. 結論 様々なタイプの洪水波の伝播特性を1次近似であるが微小振幅波理論を適用して調べた。もっとも一般的である dynamic wave について以下のことが明かとなった。① dynamic wave は、3方向に伝播する波をもつ。② 相対波速と対数減衰度は、フルード数と波数と伝播方向角度によって変化する。③ 第1波はフルード数が大きいところで増幅、小さいところで減衰、中間で波数、伝播角度に応じて増幅、減衰しながら伝播する。④ 伝播方向の変化によって第2波と第3波の間で乗り移りを生じ、特にフルード数の大きいところで顕著である。⑤ 第2波と第3波は全てのフルード数と波数に対して減衰する。

表-1 各洪水波の相対波速と対数減衰度

波のタイプ	相対波速 $\bar{C}_r = \frac{C_r}{V_0 \cos \gamma }$	対数減衰度 δ
kinematic	$\frac{m}{2} \frac{\cos \gamma}{ \cos \gamma }$	0
diffusion	$\frac{m}{2} \frac{\cos \gamma}{ \cos \gamma }$	$\frac{2\pi}{2+m} \kappa (1 + \sin^2 \gamma)$
steady dynamic	$\frac{\cos \gamma}{ \cos \gamma } \left\{ \frac{2m - F_0^2 \kappa^2}{4 + F_0^4 \kappa^2} - \frac{3F_0^2 \kappa^2 \sin^2 \gamma}{(1 + F_0^4 \kappa^2)(4 + F_0^4 \kappa^2)} \right\}$	$2\pi \kappa \frac{(1 + F_0^4 \kappa^2)(2 + m F_0^2) + (2 - F_0^4 \kappa^2) \sin^2 \gamma}{(1 + F_0^4 \kappa^2)(4 + 2m - F_0^2 \kappa^2 + F_0^4 \kappa^2) - 3F_0^2 \kappa^2 \sin^2 \gamma}$
gravity primary	$\frac{1}{F_0}$	0
second	$-\frac{1}{F_0}$	0
third	0	0

$$\bar{\kappa} = \frac{\pi h_0}{S_0 |\cos \gamma|} \quad F_0 = \frac{V_0 |\cos \gamma|}{\sqrt{g h_0}}$$

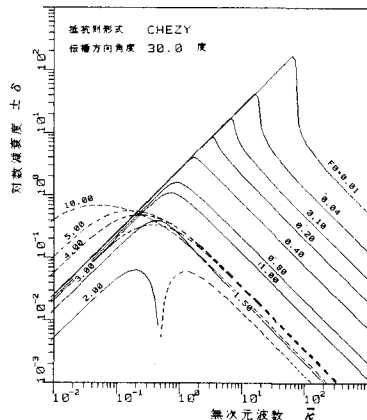


図-2 第1波の対数減衰度

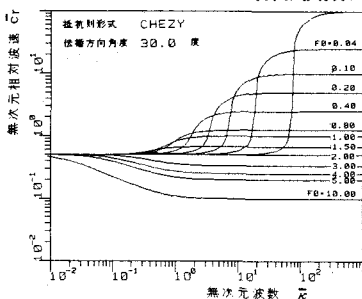


図-1 第1波の相対波速

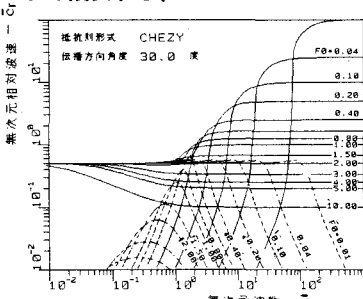


図-3 第2波と第3波の相対波速

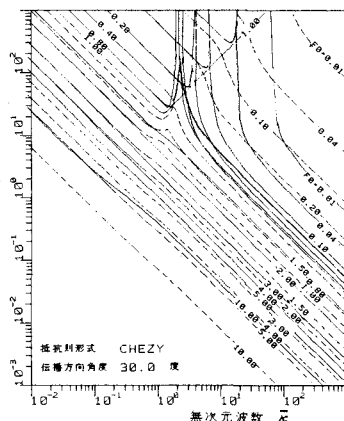


図-4 第2波と第3波の対数減衰度