II-145　乱流中の粒子の沈降速度の解析

埼玉大学　正員　山坂昌成
埼玉大学　正員　池田駿介

1．はじめに　著者ら[1]は、正弦鉛直振動を受ける流体中の球状粒子の平均沈降速度が静水中の最終沈降速度より小さくなることを実験的に確認し、抗力係数を粒子と流体の相対速度で定義した瞬間Reynolds 数の関数として与えた摂動解析により、平均沈降速度を理論的に求めた。そこでは、鉛直振動流速を単純な正弦波で与えているが、本研究では格子乱流や河川流を想定し、不規則な乱れが存在する場での粒子の平均沈降速度の算定法について検討する。

2．粒子の不規則鉛直振動解析　非定常流中の球の鉛直方向運動方程式は、Basset項を無視して、

$$(\rho_s+\chi\rho_f)V\frac{dv_s}{dt}=(\rho_s-\rho_f)Vg-\frac{1}{2}\rho_f C_D A(v_s-v_f)|v_s-v_f|+\rho_f(1+\chi)V\frac{dv_f}{dt}\quad\cdots(1)$$

で表される。ここに、ρは密度、vは鉛直下向き速度で、添字s、fはそれぞれ粒子、流体の諸量であることを示す。また、V、Aは粒子の体積、投影面積、χは仮想質量係数(=0.5)である。静水中の粒子の沈降速度v_{so}を用いて式(1)を無次元化し、無次元相対速度$u_r=(v_s-v_f)/v_{so}$が常に正であること、および乱れの統計的な性質が鉛直方向に変化しないことを仮定すると、u_r、wを無次元時間τのみの関数とした

$$a\frac{du_r}{d\tau}+C\,u_r^2=1-\frac{dw}{d\tau}\quad\cdots(2)$$

により、u_rの統計量を求めることが可能となる。ここに、$a=(\rho_s/\rho_f+\chi)/(\rho_s/\rho_f-1)$, $\tau=gt/v_{so}$, $C=C_D/C_{Do}$, $w=v_f/v_{so}$であり、CはReynolds数比$R(=R_e/R_{eo}=u_r)$の関数として与えられる[1]。流体の鉛直振動の不規則性を考慮するためにwを$w=\sqrt{\langle w^2\rangle}F(\tau)=\beta F(\tau)$で表すと、式(2)は

$$a\frac{du_r}{d\tau}+C\,u_r^2=1-\beta\frac{dF}{d\tau}\quad\cdots(3)$$

となる。ここで、定常鉛直流は存在せず、$\langle F(\tau)\rangle=0$ が成り立つものと仮定する。ここに< >は時間平均を表す。

$\beta\to0$ または$a\to\infty$の場合、$\tau\to\infty$における式(3)の解は、$u_r=1$（このとき、$C=1$）となる。このため、u_r およびCを1のまわりにβ/aで展開し、$\tau\to\infty$における解を以下のように表す。

$$u_r=1+\{U_1+u_1(\tau)\}(\beta/a)+\{U_2+u_2(\tau)\}(\beta/a)^2+\cdots\quad\cdots(4)$$

$$C=1+\dot{C}\{U_1+u_1(\tau)\}(\beta/a)+[\dot{C}\{U_2+u_2(\tau)\}+\ddot{C}\{U_1+u_1(\tau)\}^2/2](\beta/a)^2+\cdots\quad\cdots(5)$$

ここに、U_1、U_2はそれぞれ1次、2次の定常項を表し、1次、2次の時間変動項$u_1(\tau)$、$u_2(\tau)$の時間平均値はゼロとなる。また、$\dot{C}=dC/dR|_{R=1}$、$\ddot{C}=d^2C/dR^2|_{R=1}$ である。式(4),(5)を式(3)に代入して β/aの各オーダーごとに整理し、両辺の時間平均をとった式も考慮すると、

$$U_1=0\quad\cdots(6)$$

$$a\frac{du_1}{d\tau}+(2+\dot{C})u_1=-a\frac{dF}{d\tau}\quad\cdots(7)$$

$$U_2=-\frac{1+2\dot{C}+\ddot{C}/2}{2+\dot{C}}\langle u_1^2\rangle\quad\cdots(8)$$

が得られる。したがって、式(7)から$\langle u_1^2\rangle$が求められれば、問題は解けたことになる。

本研究では、$\tau\to\infty$における平均沈降速度を求めることを目的としているので、初期条件は任意である。そこで、$u_1(0^+)=F(0^+)=0$ のもとに式(7)の両辺をLaplace変換し、

$$\mathcal{L}\{u_1(\tau)\}=\mathcal{L}\{h(\tau)\}\cdot\mathcal{L}\{F(\tau)\}\quad\cdots(9)$$

を得る。ここに、演算子$\mathcal{L}$はLaplace変換を表し、$h(\tau)$は、

$$h(\tau)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-as}{as+(2+\dot{C})}\right\}=-\delta(\tau)+\frac{2+\dot{C}}{a}\exp\left(-\frac{2+\dot{C}}{a}\tau\right)\quad\cdots(10)$$

である。$\tau\leqq0$ で $F(\tau)=0$ の仮定のもとに式(9)をLaplace 逆変換すると$\tau-\xi<0$で $u_{sf}(\tau-\xi)=0$、$\tau-\xi\geqq0$ で $u_{sf}(\tau-\xi)=1$ なる Unit Step 関数を用いて $u_1(\tau)$ は、

$$u_1(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u_{sf}(\tau-\xi)h(\tau-\xi)F(\xi)d\xi\quad\cdots(11)$$

にて表現される。パワースペクトル密度と自己相関関数の関係式（例えば文献2）を用いると、式(11)から、

$$S_{uu}(\Omega)=|H(\Omega)|^2 S_{FF}(\Omega) \qquad \cdots(12)$$

が得られる。ここにΩは無次元角振動数（$=v_{so}\omega/g$、ω：角振動数）、$S_{uu}(\Omega)$、$S_{FF}(\Omega)$はそれぞれ$u_1(\tau)$、$F(\tau)$のパワースペクトル密度であり、システム関数 $H(\Omega)$は式(10)を用いると

$$|H(\Omega)|^2=\frac{(a\Omega)^2}{(a\Omega)^2+(2+\dot{C})^2} \qquad \cdots(13)$$

となる。u_1のパワースペクトル密度 $S_{uu}(\Omega)$と$\langle u_1^2\rangle$の関係は

$$\langle u_1^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\Omega)d\Omega \qquad \cdots(14)$$

であるので、式(4)、(6)、(8)、(12)、(13)、(14)より

$$\langle u_r\rangle=1-\frac{1+2\dot{C}+\ddot{C}/2}{2+\dot{C}}\, I\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \qquad \cdots(15)$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(a\Omega)^2}{(a\Omega)^2+(2+\dot{C})^2}S_{FF}(\Omega)d\Omega \qquad \cdots(16)$$

となり、鉛直振動流のパワースペクトル密度$S_{FF}(\Omega)$が与えられれば無次元平均沈降速度は式(15),(16)により求められる。

3．河川流への適用例　式(16)の積分を解析的に行うために、乱れのパワースペクトルの近似表示を行う。一様流中の乱れの流下方向成分u_fの空間自己相関関数が流下距離に対して指数的に減衰する（ $\exp(-x/\Lambda_f)$）場合には、凍結乱流を仮定すると、u_fのパワースペクトル密度は、

$$E_{uf}(\omega)=\frac{\langle u_f^2\rangle\Lambda_f}{\pi U_f}\frac{1}{1+(\Lambda_f\omega/U_f)^2} \qquad \cdots(17)$$

で表される[3)]。ここに、U_fは一様流の平均流速である。鉛直乱れの周波数特性が流下方向乱れのそれと相似であると仮定すると、鉛直乱れのパワースペクトル密度は、式(17)の$\langle u_f^2\rangle$を単に$\langle v_f^2\rangle$に置き換えることにより得られ、本研究で用いた無次元化に従うと、

$$S_{FF}(\Omega)=\frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{1+(\gamma\Omega)^2} \qquad \cdots(18)$$

となる。ここに、

$$\gamma=\frac{g\Lambda_f}{U_f v_{so}} \qquad \cdots(19)$$

である。式(18)を式(16)に代入し、積分計算を行うと、

$$I=\frac{a}{a+\gamma(2+\dot{C})} \qquad \cdots(20)$$

が得られ、乱れ強さに関する指標βと乱れの周波数特性に関する指標γが知られれば、式(15)、(20)より、乱流中の粒子の平均沈降速度を求めることができる。

d (cm)	R_{eo}	β	γ	$\langle u_r\rangle$
0.015	2.5	3.7	36	$1-8.8\times10^{-2}$
0.05	53	0.56	5.5	$1-4.7\times10^{-3}$
0.10	260	0.23	2.3	$1-2.1\times10^{-3}$
0.20	1200	0.10	1.0	$1-6.6\times10^{-4}$

表-1 模擬河川における粒子の平均沈降速度の計算結果($\rho_s/\rho_f=2.65$, $U_f=200$cm/s, $\Lambda_f=12$cm)

冨永・江崎[4)]の実験結果をもとに、鉛直乱れの強さを平均流速と関連づけて $\sqrt{\langle v_f^2\rangle}=0.03U_f$で与え、椿・小松ら[5)]により測定された実河川における乱れのパワースペクトル密度分布が式(17)に最も適合するように $\Lambda_f=12$cm として、$U_f=200$cm/sの模擬河川における砂粒子の平均沈降速度を式(15),(19),(20)を用いて計算した結果を表-1に示す。$\Lambda_f=12$cmは平均流速がかなり小さな場合（ $U_f=10\sim20$cm/s）に得られた値であり、Λ_fが渦のスケールを表す指標であることを考慮すると、$U_f=200$cm/sではΛ_f はもっと大きな値になると予想される。したがって、$\Lambda_f=12$ cmを与えることは、$U_f=200$cm/sの流れに対してはγを小さ目に見積り、結果として式(15)、(20) から求められる粒子の平均沈降速度の低下を大きめに見積っていることになる。これにもかかわらず、表-1に示した計算結果では、d=0.05，0.1，0.2 cm の粒子の平均沈降速度に及ぼす乱れの影響はほとんど現れない。したがって、一般の河川では、砂粒子の沈降速度に及ぼす乱れの効果は小さく、静水中の値で十分代用できると思われる。

4．まとめ　適用例で示した乱れのパワースペクトル密度分布は、解析の簡単化のために高周波数域で周波数の-2乗に比例する分布としているが、この分布では高周波域でのパワーの減衰が実際のもの（よく知られる-5/3乗）より大きいため、沈降速度の低下を小さく見積る可能性がある。このため、より実際に近いパワースペクトル密度分布を用いた解析も行い、ここでの結果と比較する必要がある。

＜文献＞　1)池田・山坂ら：論文集, No. 393.　2)日野：スペクトル解析.　3)Hinze：Turbulence.　4)冨永・江崎：論文集, No. 357.　5)椿・小松ら：水講論文集, No.29.