

II-107 運動量の横断輸送を考慮した一様湾曲水路内の流速分布の解析

大成建設 正員 酒寄 建之
 埼玉大学 正員 池田 駿介
 埼玉大学 正員 山坂 昌成

1. 序 一様湾曲水路では、運動量の横断輸送を考慮しなければ外岸域が速くなる流速分布を理論的に説明できない事を述べる。一様湾曲水路に於ける、流れの平衡領域での主流鉛直平均流速横断方向分布を求める。

2. 理論 水路幅 $\tilde{B}$ 、水路中心線の曲率半径 $\tilde{r}_0$ 、水路中央水深 $\tilde{h}_0$ 、平均水面勾配 I 、を有する一様湾曲水路の流れを考える。この時以下の仮定を設ける。(a) 側壁は鉛直で非浸食性、(b) $\tilde{B}$ は $\tilde{h}_0$ に比べて十分大きい、(c) $\tilde{r}_0$ は $\tilde{B}$ に比べて十分大きい、即ち、 $\nu = (\tilde{B}/2) / \tilde{r}_0 \ll 1$ である。(d) 水路断面は長方形である。この様な流れの平衡状態（：流れが流下方向に変化しない状態、 $\partial / \partial \theta = 0$ ）を支配する方程式は、図1に示される円柱座標系を用いれば次式で表される。

$$\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} = g \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}} [1 + f(\tilde{n})] + \nu_t \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \quad (1)$$

$$\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{r}} = - \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{r}} g + \nu_t \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial (\tilde{r}\tilde{v})}{\partial \tilde{r}} d\tilde{z} = 0 \quad (3)$$

$$\tilde{Q} = \int_{\tilde{B}/2}^{\tilde{B}/2} \int_0^{\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{z} \cdot d\tilde{n} \quad (4)$$

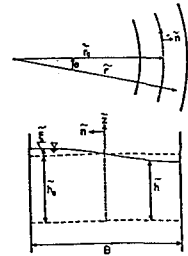


図1. 座標系及び記号の定義図

ここで、“ $\sim$ ” は次元量を示す。 $\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$ は $\tilde{r}$ 、 θ 方向流速成分、 $\tilde{r} (= \tilde{r}_0 + \tilde{n})$ は局所曲率半径、 $\tilde{n}$ は図1中に示す座標軸、 $\tilde{z}$ は鉛直座標、 $\tilde{h} (= \tilde{h}_0 + \tilde{\xi})$ は局所水深、 $\tilde{\xi}$ は水面変位量、 $\tilde{Q}$ は流量、 ν_t は次式で与える渦動粘性係数である。

$$\nu_t = 0.077 U_* \cdot h_0 = \alpha \cdot U_* \cdot h_0 \quad (5)$$

ここで、 $\tilde{U}_*$ は断面平均摩擦速度である。又、 $f(\tilde{n})$ は直線水路に於ける流速の横断方向分布であり、ここでは次式で与える。

$$f = 1 - b \{ \cosh(\gamma n) - 1 \} \quad (6)$$

ここで、 b は形状を決定する係数、 γ は両側壁に於いて $f=0$ の境界条件で決定する係数ある。

次に式(1)～(4)に対して、次に示す無次元化を行う。

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_0}, v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_0}, r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{B}/2}, z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{h}}, \xi = \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{h}_0}, h = \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_0} \quad (7)$$

次に摂動解を次式で与える。

$$u = u_0 + \nu \cdot u_1, v = \nu \cdot v_1, \xi = \nu \cdot \xi_1 \quad (8)$$

式(1)～(4)に(8)を代入し摂動展開することで ν の0次、1次のオーダーに対して各式を得る。

境界条件は次式である。水面($z=h$)に於いて

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

底面($z=0$)に於いて

$$u = \chi \frac{\partial u}{\partial z}, v = \chi \frac{\partial v}{\partial z} \quad (10)$$

ここで、 $\chi = \alpha / \sqrt{c_r}$ であり c_r は抵抗係数である。式(9)、(10)に式(8)を代入することにより

表1. 実験条件

	直線水路	湾曲水路	
		滑面	粗面
流量 $\tilde{Q}$ (l/s)	6.49	7.03	4.80
平均流速 $\tilde{U}_0$ (cm/s)	38.7	44.1	30.7
平均水深 $\tilde{h}_0$ (cm)	4.04	4.06	4.07
水面勾配 I	1/397	1/595	1/595

u_0 、 u_1 、 v_1 のそれぞれの境界条件が得られる。

以上より、 u_0 、 v_1 、 ξ_1 に対してそれぞれ次の解を得る。

$$u_0 = \frac{F(z)}{\chi_1} \cdot f(n) \quad (11)$$

ここに、

$$F(z) = -0.5z^2 + z + \chi = \sum_{i=0}^2 a_i \cdot z^i \quad (12)$$

$$\chi_1 = \chi + 1/3 \quad (13)$$

ここで、 u_0 は水路中央での鉛直平均が1となる正規化を行っている。

$$v_1 = \frac{Re}{\beta} \frac{f^2(n)}{\chi_1^2} \{F_{v1}(z) - \frac{\chi_2}{\chi_1} F(z)\} \quad (14)$$

$$\xi_1 = \frac{Fr^2}{\chi_1^3} \chi_2 \cdot f_{\xi 1}(n) \quad (15)$$

$$\chi_2 = \chi^3 + \chi^2 + \frac{2}{5}\chi + \frac{2}{35} \quad (16)$$

$$f_{\xi 1}(n) = \{(b+1)^2 + \frac{b^2}{2}\}n - \frac{2b}{\gamma}(b+1)\sinh(\gamma n) + \frac{b^2}{4\gamma} \cdot \sinh(2\gamma n) \quad (17)$$

$$F_{v1}(z) = -\frac{z^6}{120} + \frac{z^5}{20} - (1-\chi) \frac{z^4}{12} - \chi \frac{z^3}{3} - \chi^2 \frac{z^2}{2} + \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{3}\chi + \chi^2\right)(z + \chi) = \sum_{i=0}^6 b_i \cdot z^i \quad (18)$$

ここで、 Re は ν_1 で表したReynolds数、 Fr はFroude数、 B は河幅水深比(= $B/2/h_0$) である。

以上で得られた u_0 、 v_1 、 ξ_1 を用いて、側壁の影響を考慮した u_1 の鉛直平均流速横断方向分布を求める。縦断面に作用する摩擦項を考慮した θ 方向の運動方程式は次式となる(式(1) では0次におけるこの項を $f(\tilde{n})$ によって評価している)。

$$\tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}\tilde{\nu}}{\tilde{r}} = g \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}} f(\tilde{n}) + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right) \quad (19)$$

式(19)を式(7) で無次元化し式(8) を代入することで $\circ(\nu)$ の式を得る。その式に式(11)~(18)を代入し、鉛直平均をとる。更に、 $\bar{u}_1$ による底面摩擦成分を抵抗係数 C_r を用いて表すと $\bar{u}_1$ に対する次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial n^2} + k(n) \cdot \bar{u}_1 = G(n) \quad (20)$$

ここに、

$$k(n) = -2\beta^2 \cdot C_r \cdot Re \cdot f(n) \quad (21)$$

$$G(n) = Re\beta \left\{ \frac{Re}{\beta} \frac{f^2(n)}{\chi_1^3} \frac{\partial f(n)}{\partial n} C_1 + \frac{\beta}{Fr^2} |1 \cdot n \cdot f(n)| + \frac{\beta}{Re} \frac{4a_1}{\chi_1} \xi_1(n) f(n) - \frac{1}{Re \cdot \beta} \frac{\partial f(n)}{\partial n} \right\} \quad (22)$$

ここで、 c_1 は鉛直平均操作によって現れる χ に支配される積分定数。“—” は鉛直平均を示す。 $\bar{u}_1$ は式(20)を両側壁で $\bar{u}_1 = 0$ の境界条件を与え数値計算を行うことで得られる。

3. 理論の検証 $\tilde{r}_0 = 120(\text{cm})$ 、 $\tilde{B} = 40(\text{cm})$ の水路を用いて表1の条件で底面が粗面と滑面の場合に対して実験を行った。図2に u の横断方向分布の実験値と計算値の対応を示す。ここで、式(6) の係数は底面に湾曲実験と同じ粗度を付着した $\tilde{B} = 40(\text{cm})$ の直線水路で実験を行い決定している。

4. 考察とまとめ 1). 運動量の横断方向輸送を考慮する事により外岸域が速くなる流速分布を理論的に得ることができた。又、その計算値は実験値をよく表現する(図2)。2). 滑面実験は $n = 0.6$ より外岸領域で計算値が実験値より大きな値を見積もるが、これは粗面水路で決定した $f(n)$ の分布を使用している事に因る。

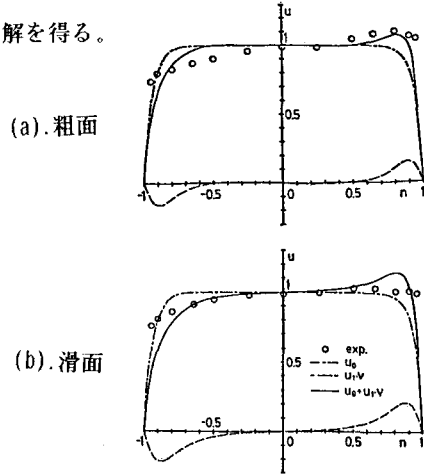


図2. $\bar{u}$ の横断方向分布の実験値と計算値