II-2　３母数対数正規分布への積率法とＰＷＭ法の適用に関する一考察

京都大学大学院　学生員　土屋一仁
山梨大学工学部　正　員　竹内邦良

①はじめに

著者ら(1988)は、対数正規分布(LN)へ Probability Weighted Moment (PWM)法を適用するための PWM公式を誘導し、他のパラメータ推定法との性能を比較検討した。

本報では、特に積率法と PWM法を取り上げ、この２つの推定法から推定されるLN分布のクオンタイルの性質を信頼度という点から再チェックした。

②基礎概念

３母数対数正規分布(LN3) は式(1) で表わされる。a,b,m はパラメータである。

PWM法は Greenwoodら(1979)により提案された分布関数のパラメータ推定法である。この推定法は式(2) で表わされる理論 PWM Mr(パラメータの関数) と、データから求められる式 (3)の標本 PWM $\hat{M}r$ が一致すると仮定して (式(4))、パラメータを求める手法である。

LN3 分布への PWM法の適用公式を具体的に示すと、式(5)-(7) となる。一方、積率法の適用公式は式(8)-(10)で表わされ、$\mu x, \sigma x, \gamma$ は平均、分散、歪係数をあらわす。

③数値実験

文献 3では、特に評価基準を式(11)で示されるクオンタイルの rmse と決め、モンテカルロ法を利用し、推定法の性能の比較を行なった。結果の概要は、積率法の rmse は他の幾つかの手法と比べ、相対的に小さく良い傾向にあるが、 PWM法の rmse は大きく、積率法に劣るというものであった。そこで本報では以下の点をチェックした。すなわち、推定された確率レベル pのクオンタイルは確率変数であるため、真の分布を設定してあるモンテカルロシミュレーションでは、この値は実際には確率レベル p' に相等する。そこで Prob($\hat{x}p$ < xp') を算定し、これについて考察を行なうといったものである。 Prob($\hat{x}p$ < xp') は厳密ではないにせよ、暫定的には区間推定でいうところの信頼係数と同等な数値である。以下に計算の手順を示す。

(A) 適当なパラメータを仮定したLN分布に従う母集団を設定する。同時に、標本数 nも設定する。ここでは文献 3と同様に，母平均 1、変動係数 Cv(歪係数γ) の２母数対数正規分布 (LN2) を母集団とした。但し、(Cv,γ) = (0.25,0.766),(0.5,1.625),(1.0,4.0)の 3パターンと、n = 30,50 の 2パターンの計 6パターンの実験を試みた。

(B) 設定した母集団に従う乱数を、 n個発生させる。

(C) 積率法、及び PWM法からパラメータを推定し、確率レベル pのクオンタイル xp をそれぞれの手法について算定する。

(D) B,C の計算を N回繰り返す。今回は N = 5000 とした。

(E) それぞれの推定法に対し、$\hat{x}p$ < xp'を満たすものの個数を数える。その個数が K(p')個であるとき K(p')/N = Prob($\hat{x}p$ < xp') となる。

なお、本実験で行なった標本歪度の偏り補正は、式(12)で表わされる標本歪度に補正係数 $\sqrt{n(n-1)}/(n-2)$ を乗ずることにした。

④実験結果

Table 2 に計算結果の一部を示した。この表は、 p = 0.99(つまり upperレベルでの再帰確率年 100年) 、p' = 0.98,0.99,0.995 (つまり再帰確率年50,100,200年) の場合である。参考までに rmse($\hat{x}p$)/xpも記した。さて、例えば、標本数 30 、歪係数 0.766、および x0.98の時、この表の数値は積率法は0.28、 PWM法は0.22であるが、これは以下のように表現できる。すなわち、

「母歪係数 0.766のとき、30個の標本からでは 100年洪水を推定したにも拘らず真の 50 年

洪水を下回る虞が、積率法では 28%、 PWM法では 22%もある。」
といった具合である。Table 2 から、積率法は過小な推定値を与える傾向が PWM法より多く、逆に PWM法は、過大とも思える推定値を与える傾向が多いという問題を含んでいることがわかる。無論、どちらも極値統計上、見逃せない点ではある。しかし、Table 2 では推定しようとする対象は x0.99、つまり極大側の値（洪水や豪雨）である。

よって、積率法は PWM法より危険性を多く含む推定法であると結論できる。

※参考文献

1)土屋(1988)： PWM法による確率水文量の評価に関する研究、山梨大学修士論文
2)竹内、土屋(1988)：正規分布、対数正規分布及びピアソンⅢ型分布の PWM解、土木学会論文集Ⅱ、第 393号
3)竹内、土屋(1988)：正規分布及び３母数対数正規分布の PWM解の性能について、土木学会論文集Ⅱ、第 393号
4) Greenwood,Landwehr,Matalas & Wallis (1979):Probability Weighted Moments,W.R.R. Vol.15,No.5 ,pp.1049-1054
5) Hoshi,Stedinger & Burges(1984):Estimation of Log-Normal Quantiles ,J. of H.,71, pp.1-30
6) Landwehr,Matalas & Wallis(1980): Quantile Estimation With More or Less Floodlike Distribution,W.R.R.,Vol.16 No.3, pp.547-555,1980

Table 2 Probability of estimated $\hat{x}_p$ being less than indicated true $x_{p'}$

Sample Size	Skew	Method	Prob($\hat{x}_p < x_{p'}$) $x_{0.98}$	$x_{0.99}$	$x_{0.995}$	rmse($\hat{x}_p$)/x_p
30	0.766	Moment	0.28	0.55	0.76	0.10
		PWM	0.22	0.45	0.66	0.12
50		Moment	0.24	0.56	0.80	0.09
		PWM	0.20	0.48	0.74	0.09
30	1.625	Moment	0.41	0.67	0.84	0.21
		PWM	0.30	0.53	0.73	0.23
50		Moment	0.33	0.65	0.85	0.17
		PWM	0.24	0.53	0.77	0.18
30	4.000	Moment	0.50	0.75	0.88	0.36
		PWM	0.34	0.58	0.77	0.41
50		Moment	0.42	0.72	0.88	0.31
		PWM	0.26	0.56	0.80	0.32

$x_p = x_{0.99}$

$x_{p'} = x_{0.98}$, $x_{0.99}$ and $x_{0.995}$

Table 1 Equations

$$F(x) = \Phi(z) \qquad \cdots\cdots(1)$$

where

$$z = \frac{\ln(x-m) - a}{b}$$

Φ : Standard Normal Distribution

$$Mr = \int_0^1 x(F)F^r dF \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\hat{M}r = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_i x_i \\ \frac{1}{n}\sum_i x_i \frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-r)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)} \end{cases} \qquad \cdots(3)$$

$$Mr = \hat{M}r \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\Psi(b/\sqrt{2}) - 1/3}{\Phi(b/\sqrt{2}) - 1/2} = \frac{M_2/M_0 - 1/3}{M_1/M_0 - 1/2} \qquad \cdots\cdot(5)$$

$$m = \frac{\Phi(b/\sqrt{2}) - M_1/M_0}{\Phi(b/\sqrt{2}) - 1/2} M_0 \qquad \cdots\cdot(6)$$

$$a = n(M_0 - m) - b^2/2 \qquad \cdots\cdots(7)$$

where

$$\Psi(w) = \int_{-\infty}^{w} \Phi(t/\sqrt{3})d\Phi(t)$$

$$\mu_x = m + A\sqrt{B} \qquad \cdots\cdots(8)$$

$$\sigma_x^2 = A^2B(B-1) \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$\gamma = (B+2)\sqrt{B-1} \qquad \cdots\cdot\cdot(10)$$

where

$$A = \exp(a) \ , \ B = \exp(b^2)$$

$$\mathrm{rmse}(\hat{x}_p) = \frac{1}{n}\sum_i \{\hat{x}_p(i) - x_p\}^2 \qquad \cdots\cdot(11)$$

where

x_p : true quantile

$\hat{x}_p(i)$: estimated quantile

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^3/s_0^3 \qquad \cdots\cdots(12)$$

$$Cs = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}\hat{\gamma} \qquad \cdots\cdots(13)$$

where

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \ , \ s_x^2 = \frac{n}{n-1}s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$