

II-1 対数正規分布の母数推定法の比較評価

京都大学大学院 学生員 清水 章

京都大学工学部 正 員 宝 馨

京都大学工学部 正 員 高棹琢馬

1. 緒言 3母数対数正規分布(LN-3)について、種々の母数推定法が提案され慣用されている。母数推定値および確率水文学の変動性を比較することにより、どの方法を用いるのが良いのかを明らかにする。モンテカルロ・シミュレーションによってデータ数とも関連づけて検討した。

2. 3母数対数正規分布 分布関数: $F(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(-s^2/2)$, 標準変数: $s = (y - \mu_y)/\sigma_y$, 確率密度関数: $f(x) = 1/\{\sigma_y(x-a)\log_{10}\sqrt{2\pi}\} \cdot \exp(-s^2/2)$, 変換変数: $y = \log_{10}(x-a)$

3. 母数推定法 以下の母数推定法について検討した。①最尤法→最適化プログラムにより尤度関数を最大化; ②最小二乗法→標準変数について最小二乗法を適用, プロットングポジション公式として Hazen 公式, Weibull 公式の2つについて検討; ③積率法→標本積率を母集団積率と等値して母数を推定, 歪係数として標本歪係数, 不偏歪係数, Bobée-Robitailleの偏り補正式¹⁾による歪係数の3方法について検討; ④石原・高瀬の方法→データ数と標本歪係数から母歪係数の推定値を与える石原・高瀬の図表を計算機プログラム化; ⑤岩井改良法→LN-3分布に従うN個の順序統計量 x_i , ($i=1, \dots, N$) について x_i の標準変数 s_i と x_{N-i+1} の標準変数 s_{N-i+1} の間に成立する関係式 $s_i = -s_{N-i+1}$ より母数 a を推定; ⑥Sextile 法²⁾→分布関数 $F(x_{(j)}) = j/6$, ($j=0, \dots, 6$) となる区間限界値 $x_{(j)}$ について Sextile mean, $w_j = \int_{x_{(j-1)}}^{x_{(j)}} 6xf(x)dx$ の平均値, 標準偏差, 差の比 $(= (w_2 - w_1)/(w_6 - w_5))$ より母数を推定 (ただし, $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(6)} = +\infty$)

4. 方法 ①LN-3分布の母数 μ_y, σ_y, a を想定する (これを真値とする)。②LN-3分布に従う乱数をN個発生させる。③②のデータセットに対して、各々の推定法によって母数および確率水文学の推定値を求める。④作業③をM回繰り返して各方法による母数および確率水文学の平均値 (推定値) と標準偏差 (推定誤差) を算定する。⑤推定値の真値からの偏倚が小さくかつ推定誤差が小さいものが良い推定法であると結論する。また、⑥Nを変化させて、確率水文学の推定誤差がどのように推移するのか、すなわちデータ数と確率水文学の変動性との関係を調べる。

母数 μ_y, σ_y, a の値は、それぞれ 2.0, 0.2, 30.0 とした。これは大阪の年最大降水量(1889~1980年)にLN-3分布をあてはめたときの最尤解に近い値である。前述の全ての母数推定法について母数および確率水文学を算定するのに要した CPU 時間は、京大大型計算機センターのFACOM M-780によれば、例えば $M=1000$, $N=100$ の場合、約 3.9min, $M=1000$, $N=1000$ の場合、約 53.8min であった。

5. 結果と考察 表-1に $M=1000$, $N=100$ のときの母数推定値と確率水文学およびその推定誤差を示した。母数推定値の偏倚および推定誤差の小さいものは、最尤法および最小二乗法である。積率法はB.R.の式で歪係数を補正してやれば母数推定値はかなり改善されるが、その変動性は大きい。岩井改良法は積率法より良い推定値を得るが、最尤法や最小二乗法よりは劣る。20, 50年確率水文学について比較すると、最尤法による偏倚はかなり小さく、50年確率の場合、推定誤差も比較的小さい。表-2は、データセット数を一定 ($M=1000$) にしてデータ数Nの値を変化させたとき、100年確率水文学の推定値と推定誤差がどのように推移するかを示したものである。どの推定法も概して、データ数の増加に伴って推定誤差は減少し、推定値は徐々に真値に近付く傾向がある。また、 $N=10, 20$ のとき、最尤法や最小二乗法の推定値および推定誤差が著しく大きくなった。これはここで用いた最適化手法を小標本に強引に適用したことによる。 $M=100$ の場合にも、以上に述べたような傾向があった。このような検討の結果、以下のことがわかった。(1) 50個程度以上のデータ数が得られるときは最尤法が良い。(2) データ数が30個程度以下のときは、積率法 (B.R. 歪), 石原・高瀬の方法, 岩井改良法が比較的良好な結果を与える。従来わが国で慣用されてきたこれらの方法の小標

本での有用性を示している。(3) 最小二乗法では, Hazen 公式を用いるのがよく, その場合, N が大きいとき最尤法と同程度の推定誤差を得る。(4) Sextile 法は N が6の倍数のときを除いて, 全般的に良い結果を与えない。

表-1 母数推定値と確率水文学およびその推定誤差 ($M=1000$, $N=100$)

母 数 推 定 法	μ_y 2.00 ; 真 値	σ_y 0.20 ; 真 値	a 30.00 ; 真 値	2 0 年 確 率 243.29 ; 真 値	5 0 年 確 率 287.48 ; 真 値
最 尤 法	2.00 (0.09)	0.20 (0.04)	28.28 (21.68)	244.04 (17.02)	289.38 (25.95)
最小二乗法 (Hazen)	2.01 (0.09)	0.20 (0.04)	25.47 (22.79)	244.69 (16.97)	289.79 (25.70)
最小二乗法 (Weibull)	2.02 (0.09)	0.20 (0.04)	23.98 (22.94)	249.76 (17.81)	297.17 (27.19)
積率法 (標本歪係数)	2.10 (0.14)	0.17 (0.05)	0.49 (41.20)	241.49 (17.20)	282.50 (26.60)
積率法 (不偏歪係数)	2.09 (0.14)	0.17 (0.05)	2.42 (40.53)	241.54 (17.17)	282.79 (26.62)
積率法 (B.R. 歪係数)	2.03 (0.18)	0.19 (0.07)	16.07 (41.23)	241.27 (16.42)	284.92 (26.91)
石原・高瀬の方法	2.02 (0.16)	0.20 (0.06)	18.87 (39.74)	241.15 (16.27)	284.87 (26.28)
岩 井 改 良 法	2.06 (0.08)	0.18 (0.03)	13.82 (24.25)	240.00 (15.67)	280.61 (22.61)
S e x t i l e 法	2.00 (0.11)	0.21 (0.04)	26.67 (25.95)	249.20 (16.82)	297.88 (26.12)

表-2 データ数 N と 100年確率水文学の推定値および推定誤差の関係
(上段: 推定値, 下段: 推定誤差, $M=1000$, 真値=321.92)

母数推定法	$N = 10$	$N = 20$	$N = 30$	$N = 50$	$N = 70$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$
歪: 平均値 標準偏差	0.6922 (0.4418)	0.9023 (0.5243)	1.0253 (0.5575)	1.1717 (0.5943)	1.2473 (0.5509)	1.3231 (0.5276)	1.4223 (0.4452)	1.5142 (0.3670)	1.5417 (0.2814)
最 尤 法	—— (—)	350.71 (113.29)	338.77 (74.83)	328.43 (52.70)	325.76 (42.53)	325.03 (34.21)	323.65 (24.44)	322.99 (14.58)	321.92 (9.97)
最小二乗法 (Hazen)	405.58 (204.20)	347.31 (92.40)	338.45 (68.30)	329.15 (51.09)	326.22 (41.72)	325.14 (33.72)	323.47 (24.13)	322.85 (14.52)	322.34 (9.93)
最小二乗法 (Weibull)	536.90 (383.15)	391.64 (121.12)	367.15 (81.60)	346.55 (57.30)	339.01 (45.39)	334.46 (35.84)	328.46 (24.87)	324.97 (14.70)	323.41 (9.99)
積 率 法 (標本歪)	301.46 (78.13)	305.21 (60.71)	308.65 (53.89)	310.28 (46.60)	311.70 (40.97)	314.08 (35.50)	316.95 (26.21)	320.15 (18.00)	320.95 (12.93)
積 率 法 (不偏歪)	305.22 (80.39)	307.30 (61.59)	309.92 (54.48)	311.29 (46.85)	312.43 (41.10)	314.61 (35.59)	317.23 (26.24)	320.27 (18.01)	321.01 (12.93)
積 率 法 (B.R. 歪)	323.53 (86.89)	320.67 (67.68)	320.86 (59.74)	318.73 (50.27)	318.67 (44.18)	319.34 (37.94)	319.92 (27.39)	321.61 (18.40)	321.88 (13.09)
石原・高瀬	317.53 (83.74)	317.76 (65.90)	319.20 (58.50)	317.27 (47.98)	317.84 (41.34)	319.31 (36.45)	320.78 (26.85)	322.42 (18.15)	322.54 (13.10)
岩井改良法	332.87 (100.50)	317.12 (64.87)	315.90 (53.53)	311.33 (42.31)	311.40 (34.66)	311.83 (28.79)	312.40 (20.77)	312.93 (13.10)	312.84 (9.02)
Sextile 法	548.00 (151.67)	422.98 (91.31)	324.53 (62.01)	357.58 (53.25)	342.47 (42.90)	336.44 (34.96)	330.59 (24.98)	325.88 (15.38)	323.69 (10.64)

【参考文献】1) たとえば, 神田・藤田: 水文学—確率論的手法とその応用—, 技報堂, 1982, p. 35.

2) 竹内・土屋・伊達: Sextile 法とPMM 法による三母数対数正規分布の母数推定, 第14回関東支部年次研究発表会講演概要集, 1987, pp. 60-61.