I-569　大振幅時のスロッシング現象に関する一考察

清水建設(株)　大崎研究室　正員　新宅正道
同　正員　高梨和光
同　正員　竹脇尚信

1. はじめに

スロッシング現象は、主に地震動によって引き起こされるタンク内の液体動揺として知られている。この現象の把握はタンクの耐震設計に欠かせないために古くから研究がなされ、初期の理論としてHousnerの理論がある[1]。これは、液体動揺をバネ質点系の運動に置き換えた簡便な理論であった。また、この現象を流体の運動としてポテンシャル理論に基づいて解析する研究[2]も行われている。しかし、これらはいずれも微小振幅を仮定した線形解析によるものであり、振幅が水深に比べて大きな場合などにはスロッシング現象を非線形運動として扱う必要があると考えられる。さらに、最近、平たい水槽のスロッシング現象を積極的に利用した制振装置に関する研究も見られる。ここではスロッシング現象を非線形運動としてとらえ、長波理論[3]に基づいて波速および固有振動数を求めてスロッシング現象の基本的な振動性状を把握する。

2. 長波理論に基づく運動量方程式

流体を完全流体、渦なし流れと仮定すると、オイラーの方程式は(1)式となる。ここでは、簡単のために運動は2次元的と考え、物体力として重力を考える。また、長波理論では、一般に$u \gg w$と考えられ、運動は水平方向には非線形、鉛直方向には線形と仮定できる。したがって、鉛直方向の非線形項は無視してある。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
水平方向　u;速度の水平成分、p;圧力、ρ;密度　(1－a)

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$
鉛直方向　w;速度の鉛直成分、g;重力加速度　(1－b)

速度の鉛直成分は底面でゼロ、自由表面では自由表面の移動速度$d\eta/dt=\partial\eta/\partial t$に等しいものと考える。ここでも、非線形項は無視してある。これより、速度の鉛直成分が直線状に分布するものと考えれば、任意の位置$z(0 \leqq z \leqq d+\eta)$における鉛直速度および鉛直加速度はそれぞれ(2)式、(3)式により求まる。

$$w(z)=\frac{z}{d+\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} \qquad (2)$$
d;水深、　η;自由表面の平均水面からの高さ

$$\frac{dw(z)}{dt}=\frac{z}{d+\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{z}{(d+\eta)^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 \qquad (3)$$

ここで、メオーテは非線形項である第2項を無視している。しかし、今回の考察では制振装置のような、水深が極端に浅く、振幅が水深に比べて大きな場合を想定しているのでこの項を残す。

(3)式を(1－b)式に代入し、鉛直方向に点zから自由表面まで積分して圧力分布を(4)式により得る。

$$\frac{p(z)}{\rho}=g\ (d+\eta-z)+\frac{1}{2}\frac{(d+\eta)^2-z^2}{d+\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\frac{(d+\eta)^2-z^2}{(d+\eta)^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 \qquad (4)$$

(4)式の第1項が静水圧であり、鉛直加速度を考慮したことにより、静水圧分布ではなくなっている。

(4)式を(1－a)式に代入し、底面から自由表面までの平均をとれば、振幅が水深に比べて大きな場合の運動量方程式(5)式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{d+\eta}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial t^2\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{1}{3(d+\eta)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \qquad (5)$$

鉛直加速度を考慮したことにより第4項の分散項が現れ、$d\approx\eta$を想定したことにより第5項以降の非線形項が加わった。

3. 波速および固有振動数

(5)式と連続の式を用いて、波速および固有振動数を求める。

微小振幅波を仮定すると、(5)式の第1項と第3項以外は消去され、(6)式の波速、固有振動数が求まる。

$$c^2=g\,d \qquad \omega=c\,k \qquad c\text{;波速、}\omega\text{;固有振動数、}k\text{;波数} \tag{6}$$

次に重複波を仮定する。第2項の移流項を消去し、(5)式を書き直して(7)式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left\{g+\frac{d+\eta}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{3(d+\eta)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\right\}\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \tag{7}$$

これは、微小振幅波におけるgが見かけ上{ }になったものと考えられる。したがって、$\eta=\eta_0e^{ikx}e^{i\omega t}$とおいて(7)式に代入し、さらに、タンク内での平均を求めて(8)式に示す見かけの波速および固有振動数を得る。

$$\bar{c}^2=g\,d\left\{1-\frac{k^2}{3}\left(d^2+\frac{1}{2}\eta_0^2\right)\right\} \tag{8-a}$$

$$\bar{\omega}=\bar{c}\,k \tag{8-b}$$

これより、タンク内に大振幅の重複波が発生した場合には、水深および振幅の影響を受けて波速が変化することがわかる。この時、水深の影響の方が振幅の2倍になることもわかる。

続いて、孤立波を仮定する。進行波であるため、$\partial/\partial t=-c\cdot\partial/\partial x$なる関係が成り立つ。この関係を(5)式に用いて書き直したものが(9-a)式、さらに、連続の式より(9-b)を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-c\,u+\frac{u^2}{2}+g\,\eta+\frac{d+\eta}{3}c^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]=0 \tag{9-a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-c\,\eta+(d+\eta)\,u\right]=0 \tag{9-b}$$

(9)式の[ ]の量はxには無関係であり定数である。さらに、孤立波では$x\to\infty$でu、ηはゼロに近づくので、これらの定数はゼロである。従って、(9)式より(10)式に示す波速が求まる。

$$c^2=g\,(d+\eta)\left[1+\frac{\eta}{2\,(d+\eta)}+\frac{(d+\eta)^2}{3\,\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{d+\eta}{3\,\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right] \tag{10}$$

大振幅時の孤立波を考える場合、移流項、分散項および自由表面の平均水面からの高さηの影響により、それぞれ[ ]内の第2~4項に相当する量だけ波速が変化することがわかる。特に、第3、4項の影響は水深および波高が波長に対して十分大きくなった時に効いてくる。

孤立波は進行波であり、固有振動数ωを持たない。しかし、ここでタンクの直径をLとし、孤立波が両方の壁にぶつかって元の位置に戻るまでを1周期と考えると、見かけの固有振動数が(11)式により求まる。

$$f=\frac{c}{2\,L} \tag{11}$$

4. おわりに

制振装置のように、水深が波長や波高に比べて小さい場合は、スロッシング現象を非線形運動として扱う必要がある。そこで、長波理論に基づき、タンク内に重複波あるいは孤立波が発生した場合の波速および固有振動数を求めてみた。今後、シミュレーションや実験を通じてさらなる検討を加えていきたい。

参考文献

1) Housner,G,W;Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Contaners,Bullitin of the Seismological Society of America,Vol.47(1957),pp15~35
2) 曽我部 潔;円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第1報,生産研究,Vol.26,No.3(1974),pp119~122
3) バーナード·ル·メオーテ;応用流体力学入門,東京大学出版会,1985