I-515　時間領域のＦＥＭとＢＥＭの結合解法による面内波動場の解析

佐藤工業（株）　正会員　東平光生
佐藤工業（株）　正会員　吉田　望

1．はじめに

ＢＥＭを用いた地盤振動解析には、複素応答法がよく用いられてきた。しかし、複素応答法では、時間の変化に伴う材料性状の変化を考慮できない等の欠点があり、材料の非線形性挙動や過渡応答を厳密に評価する必要がある場合には、振動数領域で定式化された複素応答法でなく、時間領域で直接定式化された手法が必要になる。筆者らは先に、時間領域のＦＥＭとＢＥＭの結合解法のアルゴリズムを面外波動場について展開し、良好な解が得られることを示した[1)2)]。ここでは、それに引き続き面内波動場について、時間領域のＦＥＭとＢＥＭの結合解法のアルゴリズムを展開する。

2．時間領域における面内波動場のＦＥＭとＢＥＭ

2．1　ＦＥＭの基本式

面内波動場の方程式はNavier-Cauchy方程式として以下のように与えられる。

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u}+\mu\nabla^2\vec{u}-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=0 \tag{2.1}$$

ここに、λ、μはLameの定数、ρは密度、tは時間、$\vec{u}$は変位を表す。また、∇は勾配演算子である。式(2.1)に対する有限要素法表示は、Galerkin法を用いることによって得られ、次式となる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{P(t)\} \tag{2.2}$$

ここに、［Ｍ］、［Ｋ］はそれぞれ質量および剛性マトリックスを表し、$\{\ddot{u}\}$、$\{u\}$は加速度と変位のベクトルである。また、$\{P(t)\}$は外力ベクトルであり、慣性力以外の物体力がない場合には、境界条件によって定められる。

2．2　ＢＥＭの基本式

ＢＥＭは境界積分方程式の離散化手法である。境界積分方程式では与えられた微分方程式のGreen関数が現れる。式(2.1)の方程式に対応するGreen関数をテンソル表記すると以下のように表せる。

$$G_{ij}(r,t)=A(r,t)\delta_{ij}+B(r,t)\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_j} \tag{2.3}$$

ここで、rは加振点からの距離、δ_{ij}はKroneckerのデルタであり、添字のｉおよびｊは座標成分を表す。また、$A(r,t)$，$B(r,t)$は、それぞれＳ波とＰ波の波動関数によって構成されており、次の性質を持っている。

$$\int_0^t A(r,t-\tau)\,d\tau \underset{r\to 0}{\sim} -\frac{1+\left(\frac{C_T}{C_L}\right)^2}{4\pi\rho C_T^2}\ln r+O(1) \tag{2.4}$$

$$\int_0^t B(r,t-\tau)\,d\tau \underset{r\to 0}{\sim} \frac{1+\left(\frac{C_T}{C_L}\right)^2}{4\pi\rho C_T^2}\qquad+O(r^2) \tag{2.5}$$

ここに、C_T、C_LはそれぞれＳ波とＰ波の速度、Ｏ はLandauの記号である。すなわち、波動関数ＡおよびＢは、時間に対しては可積分である一方、Ａは空間に対して $r\to 0$ で対数特異性を示す。この特異性は、静的弾性問題に現れるGreen関数の特異性と同じである。したがって、時間領域のGreen関数を用いた境界積分方

程式は、時間に関する積分は通常の意味で可能である一方、空間に関する積分はCauchyの主値の意味で評価されることになる。

以上のことを踏まえ、時間領域のGreen関数を用いて境界積分方程式を立てると、次のようになる。

$$c_{ij}u_j+\int_0^t\int_\Gamma T_{ij}u_j\,d\Gamma d\tau=\int_0^t\int_\Gamma G_{ij}\sigma_j\,d\Gamma d\tau+f_i \tag{2.6}$$

ここで、c_{ij}は境界の形状で決まる係数、T_{ij}は表面力のGreen関数、σ_jは表面力、f_iは自由地盤の応答によって表される外力項である。なお、上式では総和規約を用いている。

式(2.6)を適当な補間関数を用いて離散化し、分布マトリックスにより、節点力と変位の関係式に変換すると次のようになる。

$$\{P\}^N=[K^*]\{u\}^N-\{F\}^N \tag{2.7}$$

ここで、$\{P\}$、$\{u\}$はそれぞれ節点力と変位ベクトルであり、添字のNはNステップ目の時刻の値であることを表す。また、$[K^*]$は、境界要素領域の剛性マトリックスに相当するマトリックス、$\{F\}^N$は、Nステップ目の時刻の自由地盤の応答とNステップ以前の時刻の散乱波によって構成される外力ベクトルである。

3．　ＦＥＭとＢＥＭの結合

ＦＥＭとＢＥＭを結合するためには、ＦＥＭ領域とＢＥＭ領域の境界上で変位の連続条件と力の釣合い条件が成立しなければならない。ここでは、これらの条件のうち、力の釣合い条件を次の重み付き残差法によって表現する。

$$\int W(t)\{P_B(t)+P_F(t)\}\,dt=\{0\} \tag{3.1}$$

ここで、添字のＢとＦはそれぞれＢＥＭ領域とＦＥＭ領域を指し、W(t)は重み関数である。重み関数と時間に対する補間関数を適当に選択することにより、式(3.1)はＦＥＭ領域とＢＥＭ領域を同一時間増分で解いて行くための漸化式に変換され、以下のようになる。

$$\begin{aligned}&[M+\beta\Delta t^2K+\tfrac{1}{2}\Delta t^2K^*]\{u\}^N=[2M-(1-2\beta)\Delta t^2K-\tfrac{1}{2}\Delta t^2K^*]\{u\}^{N-1}\\&\quad+[-M-\beta\Delta t^2]\{u\}^{N-2}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\{\{F\}^N+\{F\}^{N-1}\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここに、Δtは時間増分である。また、βは重み関数の形状により決まる漸化式のパラメータでNewmarkのβ法のβに相当する。

4．　おわりに

時間領域におけるＦＥＭとＢＥＭの結合解法のアルゴリズムを面内波動場において展開した。数値計算等の細かな点については発表当日に言及する。

＜参考文献＞

1）東平光生、吉田望「時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析」構造工学論文集、vol.34A、1988

2）TOUHEI,T and YOSHIDA,N,"Dynamic Response Analysis of Ground Using a Coupled Finite Element and Boundary element Method for Time Marching Analysis", 6th ICONMIG, Innsbruck, Austria, April, 1988