I-433　有限要素法の波動伝播特性

(財)大阪土質試験所　正会員　澤田純男
京都大学防災研究所　正会員　土岐憲三

1．はじめに　著者等は３次元有限要素法をもちいて断層運動のシミュレーションを行った。しかしながら３次元モデルの計算量は膨大であり、要素の大きさを大きくして自由度数を小さくしなければ計算ができない。一般に解析には波長方向に６要素から８要素必要であると考えられ、要素の大きさを大きくすると高振動数領域の計算ができなくなる。しかしながら適当な補正を行えば１波長２要素程度のメッシュサイズで解析可能であろう。そこで補正法の開発を目的として、まず有限要素法の波動伝播特性について検討した。連続体力学では振動の支配方程式は波動方程式であるが、有限要素法では離散化のために波動方程式の代わりにバネ質点系の運動方程式を解いており、このことがモデルの波動特性に与える影響についても調べた。モデルは簡単な１次元無限弾性体とした。

2．解析法　簡単のため、図１のような１次元の理想無限弾性体を考える。内部減衰のない一次元波動方程式は次式(1)に示される。

$$\ddot{u} = c^2 u_{,xx} \qquad (1)$$

ここに、u：変位、c：位相速度、x：位置座標、ただし$\ddot{u}$はuの時間微分を、$u_{,x}$はuのxに関する偏微分を表す。即ち図１に示すようにa点の応答がホワイトノイズの場合のb点の応答はやはりホワイトノイズとなる。

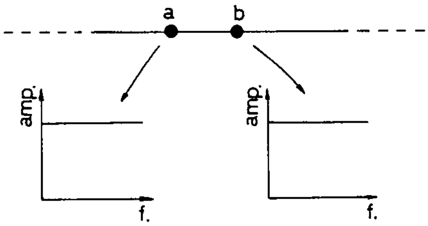

図１　１次元無限弾性体

式(1)を中央差分法で離散化すると式(2)のようになる。

$$u(x,t+\Delta t) = (2-2\beta)u(x,t) - u(x,t-\Delta t) + \beta^2\{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)\} \qquad (2)$$

ここに、β：無次元化速度（$c\cdot\Delta t/\Delta x$）、Δt：時間間隔、Δx：節点間隔

つぎに有限要素法によってモデル化すると図２のようになる。運動方程式は式(3)である。

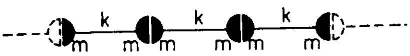

図２　有限要素法によるモデル化

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \qquad (3)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & & & & \\ & 2m & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 2m & \\ & & & & m \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -k & 2k & -k \\ & & & -k & k \end{bmatrix} \qquad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_x \end{Bmatrix}$$

すなわち波動方程式がバネ質点系の運動方程式に置き換えられたことになる。ここに、m：質量、k：ばね定数（$k/m = (\pi V/2\Delta x)^2$）、V：弾性波速度である。なお時間積分には線形加速度法を用いた。

3．波動伝播特性　解析モデルは図３に示すように19節点18要素のモデルであり、中央の節点０に調和波を変位入力した。なお端点は自由端であるが、解析時間を短くすることにより反射波の影響を受けないようにしている。

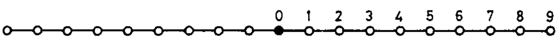

図３　解析モデル

弾性波速度Vを0.008要素／ステップ、解析時間を2000ステップとした。入力にもちいた調和波は16要素／波長（周期2000ステップ）から２要素／波長（周期250ステップ）である。有限要素法(F.E.M.)による節点０から節点４までの時刻歴変位波形を図４に示す（入力は４要素／波長）。なお時刻歴波形で比較する限り有限要素法と差分法(F.D.M.)は大きな違いはない。この波形から図４に示すA_2, A_1, f_2, f_1, Vcを読み取り、振幅比A_2/A_1、速度比Vc/V、振動数比f_2/f_1の形にまとめたのが図５～７である。なお横軸はf_1か

ら求めた値である。図５の振幅比では両手法とも８要素／波長付近から振幅比が下がりはじめ、４要素／波長で0.85程度になるが、有限要素法のほうが差分法より若干高振動数領域で伝播特性が良い。図６の速度比では、両手法とも高振動域で速度が理論上の弾性波速度より10数パーセントおそくなるが、有限要素法のほうは低振動領域で理論上の速度より若干伝播速度が速くなっている。特に差分法では３要素／波長以下の領域で急激に減少しており、このあたりが位相の伝播の限界ではないかと考えられる。図７に振動数比を示した。両手法とも伝播過程において波の振動数の変化が見られる。

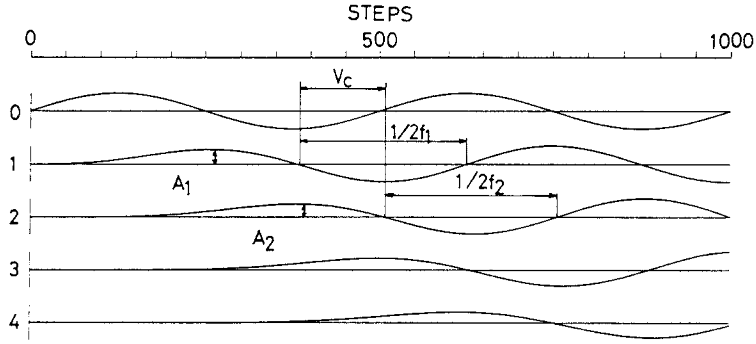

図４　応答変位波形

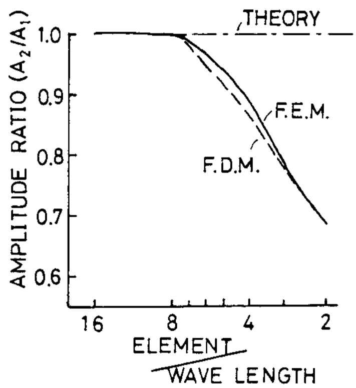

図５　振幅比

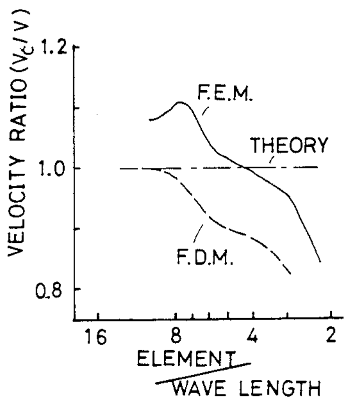

図６　速度比

４．あとがき　有限要素法は差分法に比べ若干高振動領域での伝播特性が良い。また有限要素法・差分法ともに高振動数領域で振幅が減少するが、位相特性は比較的正確に伝播しており、適当な振幅補正を行うことにより、１波長２～３要素程度の要素分割で解析できる可能性があると思われる。今回は簡単のため非減衰一次元問題のみ取り扱ったが、減衰のある場合および２次元・３次元問題のＰ波・Ｓ波についても調べた後、高振動数領域の補正法を検討する予定である。

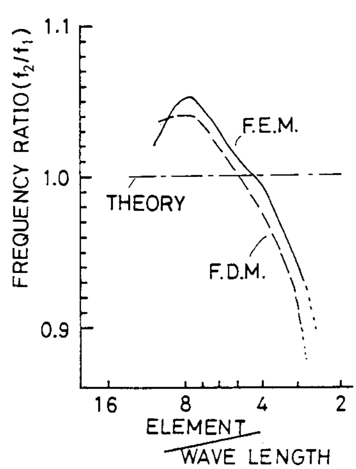

図７　振動数比

参考文献

澤田・土岐：３次元有限要素法による断層生成過程の解析、第19回地震工学研究発表会、pp.65,　1987.

赤尾・伯野：動的解析における無限境界での波動的処理、土木学会論文報告集、No. 336, 21-29, 1983.

戸川隼人：有限要素法による振動解析、サイエンス社.