

I-430 3次元円形クラックによる弾性波動の散乱

岡山大学工学部 正員 廣瀬壮一

1. まえがき

本研究は、無限弾性体中にある円形クラックによる弾性波動の散乱問題を境界積分方程式法(境界要素法)により解析したものである。定式化は、直接、時間領域においてなされており、各時間毎に積分方程式を解いて過渡的応答を求める時間ステップ法が用いられている。

2. 定式化

ここでは、3次元無限空間 D 内にある円形クラック S を考える (Fig.1参照)。領域 D は弾性体と仮定し、その中を伝播する波動はNavier-Cauchyの方程式を満足するものとする。また、クラック面上では、表面力零の境界条件が満足されており、散乱波は無限遠方において放射条件を満足するものとする。さらに、時間 t が負の区間においては、波動場が静止過去状態にあると仮定すると、領域 D 内の点 $\mathbf{x}$ における全変位 $\mathbf{u}$ は次のように積分表現される。

$$u_k(\mathbf{x}, t) = u_k^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_S \int_0^t C_{pqrs} n_q(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_s} G_{kr}(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) [u_p(\xi, \tau)] d\tau dS_\xi \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

ただし、 u^{in} は入射波の変位を表しており、 $[u(\xi, \tau)]$ は、 $[u(\xi, t)] \equiv u^+(\xi, t) - u^-(\xi, t)$ で定義されるクラック開口変位である。また、 $G_{kr}(\mathbf{x}, t)$ は次式で定義される基本解である。

$$G_{kr}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho|\mathbf{x}|} \left\{ \left(\frac{3x_k x_r}{|\mathbf{x}|^2} - \delta_{kr} \right) \int_{c_L^{-1}}^{c_T^{-1}} \eta \delta(t - \eta|\mathbf{x}|) d\eta \right. \\ \left. + \frac{x_k x_r}{|\mathbf{x}|^2} \left[\frac{1}{c_L^2} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L}\right) - \frac{1}{c_T^2} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_T}\right) \right] + \frac{\delta_{kr}}{|\mathbf{x}| c_T^2} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_T}\right) \right\} \quad (2)$$

ただし、 ρ は密度、 c_L 、 c_T はそれぞれ縦波、横波の波速である。また、式(1)において $\mathbf{n}$ はクラック S 上の法線ベクトルであり、 C_{pqrs} は

$$C_{pqrs} = \lambda \delta_{pq} \delta_{rs} + \mu (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) \quad (\lambda, \mu : \text{Lamé constants}) \quad (3)$$

で与えられるテンソルである。

クラック S 上における境界条件より次式が得られる。

$$-t_i^{in}(\mathbf{x}_0, t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} C_{ijkl} n_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_l} \int_S \int_0^t C_{pqrs} n_q(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_s} G_{kr}(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) [u_p(\xi, \tau)] d\tau dS_\xi \\ = -C_{ijkl} C_{pqrs} n_j(\mathbf{x}_0) p.f. \int_S n_q(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_s} G_{kr}(\mathbf{x}_0 - \xi, t - \tau) [u_p(\xi, \tau)] d\tau dS_\xi \quad \mathbf{x}_0 \in S \quad (4)$$

ただし、 t^{in} は入射波に関連する表面力であり、 $p.f.$ は積分の有限部分を表す。式(4)より未知数 $[u(\xi, \tau)]$ を決定すれば、領域 D 内の任意の点 $\mathbf{x}$ における変位は式(1)より求められる。

3. 遠方における散乱波

点 $\mathbf{x}$ がクラックより十分に遠方にあるとして、式(1)において $|\mathbf{x} - \xi| \approx |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \xi$ (ただし、 $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$) なる近似を用いれば遠方における散乱変位は球座標系 (R, Θ, Φ) において次式のように表される。

$$u_R^{sc}(\mathbf{x}, t) = \Omega_R(\hat{\mathbf{x}}, t - |\mathbf{x}|/c_L)/(4\pi|\mathbf{x}|) \\ u_\Theta^{sc}(\mathbf{x}, t) = \Omega_\Theta(\hat{\mathbf{x}}, t - |\mathbf{x}|/c_T)/(4\pi|\mathbf{x}|) \\ u_\Phi^{sc}(\mathbf{x}, t) = \Omega_\Phi(\hat{\mathbf{x}}, t - |\mathbf{x}|/c_T)/(4\pi|\mathbf{x}|) \quad (5)$$

ただし、 Ω_R , Ω_Θ , Ω_Φ は遠方領域における散乱波のP,SH,SV成分の振幅分布を表すもので、例えば、 Ω_R は

$$\Omega_R(\hat{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L}) = \frac{c_T^2}{c_L^3} \{ (\frac{c_L^2}{c_T^2} - 2) \delta_{pq} + 2\hat{x}_p \hat{x}_q \} \int_S n_q(\xi) [\dot{u}_p(\xi, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \xi}{c_L})] dS_\xi \quad (6)$$

で表される。（ Ω_Θ , Ω_Φ は省略）

4. 結果

ここでは、Fig.1に示すような半径 a の円形クラックに垂直に入射するP波の散乱問題を考えた。入射波 u^{in} は次式で与えられるものを考えた。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \delta_{3i} H(x_3 + c_L t) (x_3 + c_L t)/a \quad (H(\cdot) : \text{Heaviside step function}) \quad (7)$$

数値計算法の詳細は省略するが、式(4)の離散化においては、未知数 $[u]$ を時間に関して線形関数で、空間に関しては静的問題の解析解で近似した。クラック面 S は360個の要素に分割し、時間ステップ間隔は $c_T \Delta t/a = 0.09$ とした。また、弾性体 D のポアソン比は0.25とした。Fig.2は、クラック上のいくつかの点におけるクラック開口変位 $[u_3]$ を時間 $c_L t/a$ に対してプロットしたものである。入射波が到達後、まず開口変位は線形的に増加し、その後振動しながら静的解に漸近している。Fig.3は、時刻 $c_T t/a = 9$ における開口変位を、静的問題の開口変位と比較して示したものである。両者はよく一致している。Fig.4は、無限遠方における散乱P波の振幅分布 Ω_R の時間的変化を様々な角度 Φ に対してプロットしたものである。 Φ が小さくなるほど、波動の増幅の相互干渉によりピークは鋭く、振幅は大きくなるのがわかる。

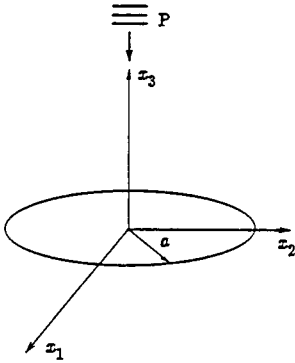


Fig.1 無限弾性体中の円形クラック

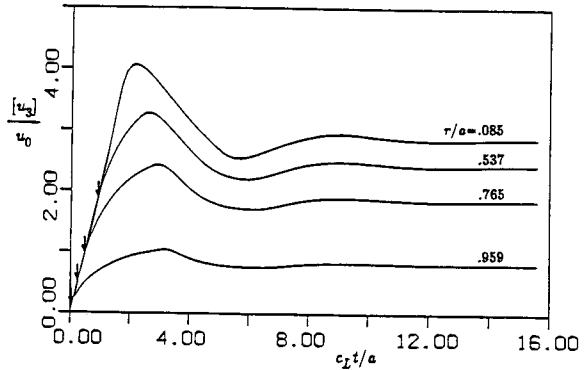


Fig.2 クラック開口変位の時間的变化

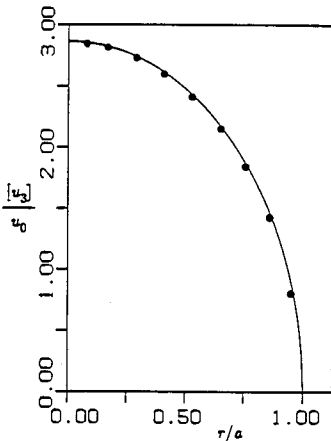


Fig.3 時刻 $c_T t/a = 9$ における本手法による解 (・) と 静的解析解 (実線)

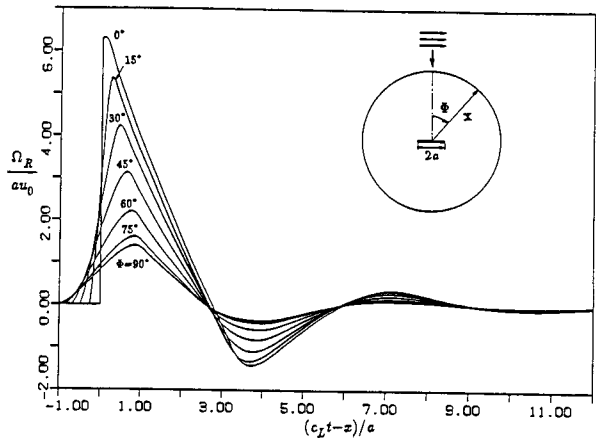


Fig.4 無限遠方における散乱P波の振幅分布 Ω_R の時間的変化