

I-427

二層同心円柱の波動伝播問題における境界条件の影響

室蘭工業大学 学生員 竹内 徹,

正員 松岡 健一

室蘭工業大学 正員 岸 徳光,

日本大学 正員 能町 純雄

1. まえがき 積層複合材の基本的なものの一種として、同心円状におかれた、異質な材料からなる、多層同心円柱があるが、これらは鉄筋コンクリート柱や鋼管構造物などの理想化されたモデルとみることができ、三次元弾性論で厳密に解析することかできる。¹⁾ ²⁾ これら複合部材の波動伝播特性は、境界面の状態によって変化することが考えられる。ここでは円柱の外面および境界面の状態に着目し、これらの状態が位相速度に及ぼす影響を検討するとともに、波動モードについても検討を加えることを目的としている。

2. 基礎変位式 Hankel変換を用いた円柱座標に関する波動伝播問題の変位解は、すでに求めているので、¹⁾ ²⁾ ここではその求め方の概要を述べ、結果のみを示すこととする。図-1のように、円柱軸をz軸とする(r, θ, z)座標系を考え、波動はz軸方向に進行する定常波動伝播を仮定し、波動の角速度をω、伝播速度をVとし、周方向の波動次数をmとすれば、円柱座標で表わされる波動方程式を半径方向にHankel変換することにより、円筒の各変位成分(u, v, w)は次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos m\theta & \cos m\theta & 0 \\ \sin m\theta & -\sin m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_{mr} \\ \tilde{B}_{mr} \\ \tilde{W}_{mr} \end{Bmatrix} \exp[i\omega(t-z/V)]$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{A}_{mr} & \tilde{B}_{mr} & \tilde{W}_{mr} \end{Bmatrix}^T = \sum_{k=1}^2 K_{mk} \begin{Bmatrix} F_{A_{mk}} & F_{B_{mk}} & F_{C_{mk}} & E_{mk} \end{Bmatrix}^T$$

$$F_{A_{mk}} = \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iNE_{mk}/2$$

$$F_{B_{mk}} = \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iNE_{mk}/2$$

$$F_{C_{mk}} = \beta_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk}$$

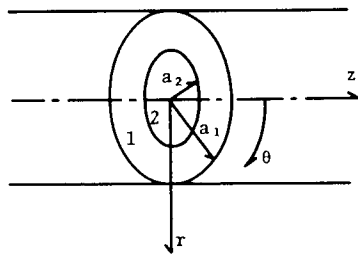


図-1 円柱座標

ただし K_{mk} は3行4列のマトリックスである。

3. 境界条件 二層同心円柱を伝わる弾性波の速度は、2. で求めた変位式を円筒と円柱の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。いま円筒を表わすすべての量を添字1、円柱を表わすすべての量を添字2で示す。

円筒の内外面における境界条件を考えると、

i) 円筒の外面で、

$$\text{Case I (円筒外面は自由)} \quad \tau_{r\theta,1}|_{r=a_1} = 0, \tau_{rz,1}|_{r=a_1} = 0, \sigma_{r,1}|_{r=a_1} = 0$$

$$\text{Case II (円筒外面は拘束)} \quad u_1|_{r=a_1} = 0, \partial w/\partial r|_{r=a_1} = 0$$

ii) 円筒の内面で、

円筒の内面は、円柱と接触しているので、接触面の条件によって異なる境界条件となる。本論では、この接触面の状態による影響を検討することが目的であるので、この取扱いが問題となるが、ここでは、接触面で半径方向変位および半径方向応力のみ連続でせん断力は、軸方向および周方向変位の相対的なずれに応じたせん断応力が生ずるもの、すなわち

$$u_1|_{r=a_2} = u_2|_{r=a_2}, v_1|_{r=a_2} = v_2|_{r=a_2}, w_1|_{r=a_2} = w_2|_{r=a_2}, \sigma_{r,1}|_{r=a_2} = \sigma_{r,2}|_{r=a_2}$$

$$\tau_{r\theta,1}|_{r=a_2} = \tau_{r\theta,2}|_{r=a_2} = K[v_1|_{r=a_2} - v_2|_{r=a_2}]$$

$$\tau_{rz,1}|_{r=a_2} = \tau_{rz,2}|_{r=a_2} = K[w_1|_{r=a_2} - w_2|_{r=a_2}]$$

4. 数値解析および考察 数値解析は、縦波動($m=0$)に対して行ない、円筒と円柱の弾性係数、ポアソン比をそれぞれ E_1, ν_1, E_2, ν_2 として鉄筋コンクリートを想定した数値を用いて行った。

$$\nu_1 = 1/6, \nu_2 = 0.3, E_2/E_1 = 7.0, \rho_2/\rho_1 = 3.2, a_2/a_1 = 0.10$$

計算結果の一部を図に示すが、位相速度は、図で、縦軸に位相速度と小さい方のせん断波速度の比を、横軸には波長の半波長を l として、左半分に a_1/l を右半分に l/a_1 をとり、全体として波長零から無限大までを示すようにしている。図-2～3に縦波動の位相速度分散曲線を示した。

図-2はCase Iの一次の分散曲線を示したがこの場合の k は軸方向および周方向変位の相対的ずれに乗ずる比例定数 K を無次元化したもので $k = K a_1 / E_1$ で表される値である。いずれの k に対しても波長無限大では $a_2/a_1 = 0.10$ に対して V/V_{s1} の値は1.556となるが、これは二層円柱

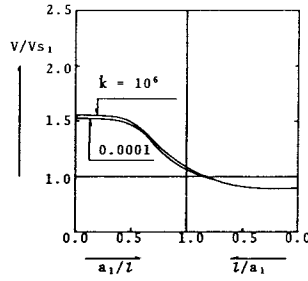


図-2 一次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case I)

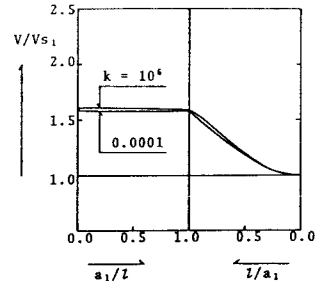


図-3 一次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case II)

を体積に応じた換算材料定数をもつ円柱としたときのbar velocity 1.554とほぼ一致している。また、波長零では円筒体（弾性波速度の小さい方）のRayleigh波の速度に一致している。図-3には、Case IIについても同様に一次の分散曲線を示したが、いずれの k に対しても波長無限大では V/V_{s1} の値は $a_2/a_1 = 0.10$ に対して1.609となるが、この場合Case Iと違い換算断面の縦波の伝播速度と円筒のせん断波速度の比1.611とほぼ一致している。そして波長零ではこの場合は円筒（弾性波速度の小さい方）のせん断波の速度と一致している。

図-4には一次の縦波動の波動モードを若干の波長に対して示した。

Case I, Case IIとも波長が長い場合では、変位や応力のモードは同じような挙動を示し k がある程度より大きいと波長無限大では全断面一様に変位し平面保持が満足されている。しかし波長が短くなるに従い平面保持は崩れCase Iでは表面に変位や応力が集中し、表面波の様相を呈してくるのに対しCase IIでは表面よりむしろ円筒内部に集中し波動は軟らかい部分を伝播するようである。

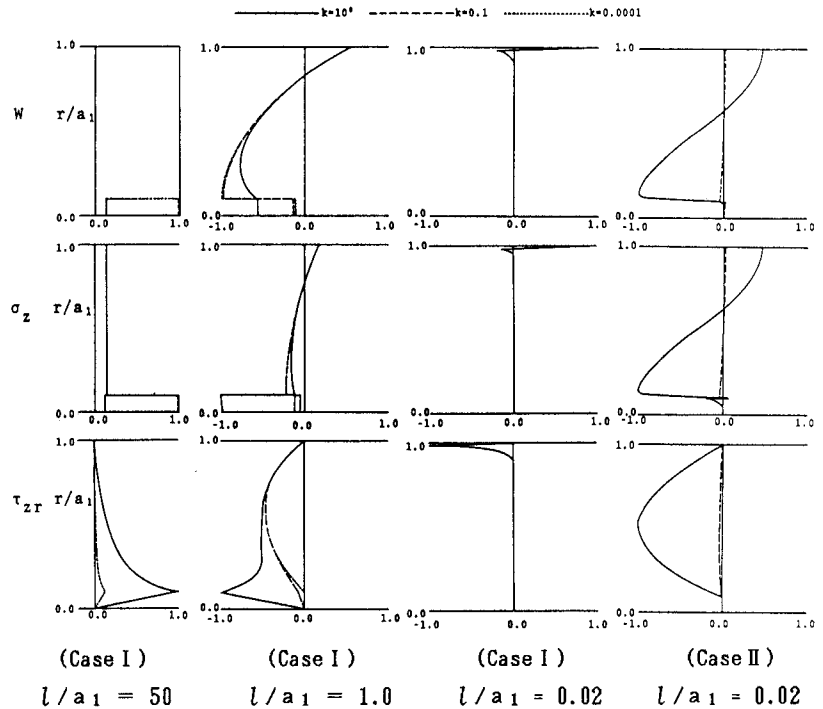


図-4 波動モード

参考文献

- 1) 松岡健一・能町純雄：弾性媒体中にある円柱を曲げ波動の伝播速度について、土木学会論文報告集、第258号、1977。
- 2) 能町純雄・松岡健一・坂下正幸：弾性媒体中の厚肉円筒を伝わる弾性波について、土木学会論文報告集、第293号、1980。