

I-419 2次モードを考慮した非線形モデル体のせん断振動応答

日本大学○正員 澤野利章

日本大学 正員 能町純雄

日本大学 正員 木田哲量

日本大学 正員 阿部 忠

1. はじめに 応力とひずみが非線形を示す媒体に水平振動を強制する場合の加速度共振曲線は、応答加速度のピーク値が低周波領域に移行するスプリングソフトニング現象が認められる。この現象を説明するために、著者らはこれまで、非線形バネを含むフォークト体等を用いて、非線形弾性を有する媒体の応答解析を進めてきたが、振動による変形モードはそれはsin級数の1次モードを仮定してきた。しかし、この媒体によって構成される層状構造物の振動応答変位は、1次モードのみならず全モードの結合であるはずである。そこで本研究においては、振幅の第2次モードまで、すなわち1次、2次のモードまでを考え非線形フォークト体(図-1)の応答加速度を求め両者の比較考察を行なうこととする。

2. 運動方程式 図-2のような層状構造物を仮定した場合の運動方程式は式(1)となる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p \right) \quad (1)$$

ここで、 u ；応答変位、 p ；外力

さて、本モデルの非線形バネの復元応力は、ある範囲を越えると復元作用を失うことから、ひずみ γ の3次式で仮定する。したがって、このモデルに強制力を加えた場合の復元応力 τ は式(2)となる。

$$\tau = G_0 \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2} \right) + G' \dot{\gamma} \quad (2)$$

ここで、 G_0 ；非線形バネ定数、 G' ；粘性定数、 γ_1 ； $\partial \tau / \partial \gamma = 0$ の時のひずみ値

3. 1次モードの復元応力 図-2の構造系において、境界条件 $x=0$ で $u=0$ 、 $x=2\ell$ で $\tau=0$ を満足するように変位 u を次式のとおき仮定する。なお、ひずみ γ は式(4)となる。

$$u = A_1 \sin \frac{\pi}{2\ell} x \quad (3), \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} = A_1 \frac{\pi}{2\ell} \cos \frac{\pi}{2\ell} x = \gamma_1 \bar{\gamma}_1 \cos \frac{\pi}{2\ell} x$$

ここで、 $A_1 = (2\ell/\pi) \gamma_1 \bar{\gamma}_1$ とすれば、復元応力は式(5)となる。

$$\tau = G_0 \gamma_1 \left(\bar{\gamma}_1 - \frac{1}{3} \bar{\gamma}_1^3 + \frac{G'}{G_0} \dot{\bar{\gamma}}_1 \right) \cos \frac{\pi}{2\ell} x \quad (5)$$

4. 2次モードまでを考慮した復元応力 境界条件は1次モードの場合と同様として、変位を式(6)で仮定することとする。

$$u = A_1 \sin \frac{\pi}{2\ell} x + A_3 \sin \frac{3\pi}{2\ell} x \quad (6)$$

よって、ひずみは、 $A_1 = (2\ell/\pi) \gamma_1 \bar{\gamma}_1$ 、 $A_3 = (2\ell/3\pi) \gamma_1 \bar{\gamma}_3$ とすれば式(7)となる。

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\partial u}{\partial x} = A_1 \frac{\pi}{2\ell} \cos \frac{\pi}{2\ell} x + A_3 \frac{3\pi}{2\ell} \sin \frac{3\pi}{2\ell} x \\ &= \gamma_1 \bar{\gamma}_1 \cos \frac{\pi}{2\ell} x + \gamma_1 \bar{\gamma}_3 \cos \frac{3\pi}{2\ell} x \end{aligned} \quad (7)$$

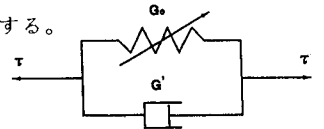


図-1 非線形フォークト体

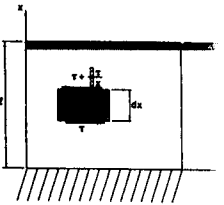


図-2 層状構造

このひずみを式(2)に代入すると、復元応力は式(8)となる。

$$\begin{aligned} r = G_0 \cdot r_1 \cdot \left\{ \left(\bar{\eta}_1 - \frac{1}{4} \bar{\eta}_1^2 - \frac{1}{4} \bar{\eta}_1^2 \bar{\eta}_3 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_3^2 + \frac{G'}{G_0} \bar{\eta}_1 \right) \cos \frac{\pi}{2\ell} x \right. \\ \left. + \left(\bar{\eta}_3 - \frac{1}{12} \bar{\eta}_1^2 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_1^2 \bar{\eta}_3 - \frac{1}{4} \bar{\eta}_3^3 + \frac{G}{G_0} \bar{\eta}_3 \right) \cos \frac{3\pi}{2\ell} x \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

5. 底面応答ひずみ 式(1)の両辺にweight functionとして、 $\sin \frac{\pi}{2\ell} x$ と $\sin \frac{3\pi}{2\ell} x$ を乗じ $x=0$ から $x=2\ell$ まで積分して $x=0$ の場合について注目すると、次の関係式を得る。

$$-\frac{\pi}{2\ell} \int_0^{2\ell} r \cos \frac{\pi}{2\ell} x dx = \rho \int_0^{2\ell} \ddot{u} \sin \frac{\pi}{2\ell} x + \rho \int_0^{2\ell} p \sin \frac{\pi}{2\ell} x \quad (9)$$

$$-\frac{3\pi}{2\ell} \int_0^{2\ell} r \cos \frac{3\pi}{2\ell} x dx = \rho \int_0^{2\ell} \ddot{u} \sin \frac{3\pi}{2\ell} x + \rho \int_0^{2\ell} p \sin \frac{3\pi}{2\ell} x \quad (10)$$

そこで式(9)、(10)に1次モード、3次モードそれぞれの場合の r 、 u の関係式を代入して整理すると式(11)、(12)、(13)を得ることができる。

$$\left(\eta_1 - \xi^2 \eta_1 - \frac{3}{16} \eta_1^2 \right)^2 + (2h\xi\eta_3)^2 = P^2 \quad (11)$$

$$\left(\eta_1 - \xi^2 \eta_1 - \frac{3}{16} \eta_1^2 - \frac{3}{8} \eta_1 \eta_3^2 - \frac{3}{16} \eta_1^2 \eta_3 \right)^2 + (2h\xi\eta_3)^2 = P^2 \quad (12)$$

$$\left(\eta_3 - \frac{\xi^2}{9} \eta_3 - \frac{1}{16} \eta_1^2 - \frac{3}{8} \eta_1^2 \eta_3 - \frac{3}{16} \eta_3^3 \right)^2 + (2h\xi\eta_3)^2 = \frac{P^2}{81} \quad (13)$$

ここで、 $\bar{\eta}_1 = \eta_1 \sin \omega t$ 、 $\bar{\eta}_3 = \eta_3 \sin \omega t$ 、 $P = 8\rho p\ell / G_0 r_1 \pi^2$

$$\xi^2 = \rho / G_0 (2\ell/\pi)^2 \omega^2, \quad 2h\xi = G' \omega / G_0$$

6. 表面応答加速度 既往の実験においては、応答加速度が計測されている。そこで図-2における $x=\ell$ の場合の加速度を無次元量として計算する。すなわち、式(2)から式(14)が得られる。

$$\frac{\partial r}{\partial x} = G_0 \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \frac{r^2}{r_1^2} \right) + G' \frac{\partial \dot{r}}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p \right) \quad (14)$$

よって、式(14)に、式(4)、(7)の関係式を代入すると無次元応答加速度が求まる。

$$1 \text{ 次モード; } A = (2/\pi) \eta_1 (1 + 4h^2 \xi^2)^{1/2} \quad (15)$$

$$2 \text{ 次モード; } A = (2/\pi) (\eta_1 + 3\eta_3) (1 + 4h^2 \xi^2)^{1/2} \quad (16)$$

ここで、 $A = P|a|/|p|$

7. 結果

底面応答ひずみ

の計算結果を図-

3に、表面応答加

速度を図-4に示

した。ここで、実

線は1次モードを

表し、破線は3次

モードを考慮した

場合を表す。

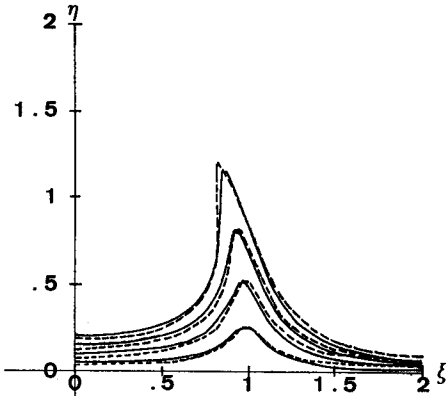


図-3 応答ひずみ-周波数

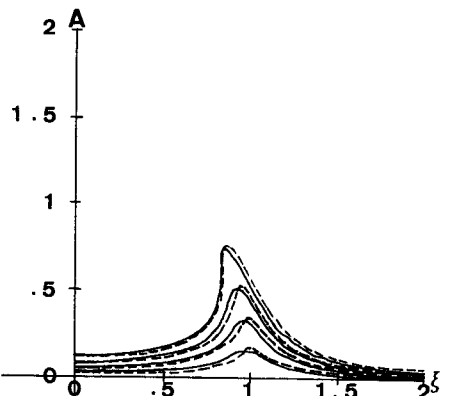


図-4 表面応答加速度-周波数