I-414　平面骨組構造の面外強制振動
（固有マトリクス法）

信州大学　正員　夏目正太郎
信州大学　正員　石川清志

§1．はじめに

平面骨組構造に面外振動荷重が作用したとき、振動時における構造物各部の状態量を調べるものである。構造物の振動は、各部材個々の振動が順次伝達されて全体振動となる。

一本の棒の振動には縦振動、捩じれ振動とたわみ振動がある。二次元系の骨組構造物を扱う時は縦振動とたわみ振動とを組合せれば面内振動を示し、捩じれ振動とたわみ振動とを組合せれば格子構造の振動を表すであろう。そして構造物は地下に埋設された部分と連続されているので、これらを一体として解析すべきものである。故に構造物の挙動を表す基本微分方程式は弾性床上の梁の挙動を表すものを用い、静力学と同じにＷｉｎｋｌｅｒの仮定を許して、変形に比例する反力を想定する。捩じれとたわみと、それぞれに基礎率k_ϕとk_wを設定して置く。

捩じれ振動：
$$GJ\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{Aj^2\gamma}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+k_\phi\phi=\Phi(t) \qquad (1)$$

たわみ振動：
$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k_w w=F(t) \qquad (2)$$

これらの微分方程式の解が斉次解と非斉次解との和で表されるとするならば、斉次解における固有振動数をωとすれば

$$\mu^2=\frac{Aj^2\gamma\omega^2L^2}{gGJ}+\frac{k_\phi L^2}{GJ} \qquad \nu^4=\frac{A\gamma\omega^2L^4}{gEI}-\frac{k_w L^4}{EI} \qquad (3)$$

ここにおいてk_ϕとk_wはそれぞれ捩じれ振動とたわみ振動に対する基礎率であり、これらがゼロの時は空間における振動の式となる。積分未定常数がN_ϕとN_wならば

$$\phi=[\cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho]\,N_\phi\exp(i\omega t) \qquad (4)$$

$$w=[\cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad \cosh\nu\rho \quad \sinh\nu\rho]\,N_w\exp(i\omega t) \qquad (5)$$

$$\rho=\frac{x}{L} \qquad (6)$$

一本の棒の挙動としては（4）と（5）を一つに括って

$$\begin{bmatrix}\phi\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\mu\rho & \sin\mu\rho & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\nu\rho & \sin\nu\rho & \mathrm{ch}\,\nu\rho & \mathrm{sh}\,\nu\rho\end{bmatrix}\mathbf{N}\exp(i\omega t) \qquad (7)$$

$$\mathbf{N}=\{N_\phi \ \ N_w\} \qquad (8)$$

非斉次解では外力振動数をpとすれば振動の式はωがpに変わるだけで外見は（4），（5）と同じである。しかし外力項を荷重マトリクスに依存するのでその点で内容は多いに異なる。荷重マトリクスはK(κ)であり外力がκ点に作用している。
この時ρ＝κからρ＝1の区間では固有マトリクスNpはNp′となり

$$Np' = Np + K(\kappa) \qquad (9)$$

の様になる。そこで部材の状態量は

$$W = DRN\,exp(i\omega t) + DR[Np + \langle K(\kappa)\rangle]\,exp(ipt) \qquad (10)$$

となろう。

§2.　境界条件と振動の固有値、固有マトリクス、初期条件

骨組構造物は一つの節点に幾つかの部材が集まって構成されている。そこには変位の連続条件や力の平衡条件があり、部材の数だけ固有マトリクスも存在する。境界条件としては支持状態がそれに該当し埋込端、自由端やヒンジ端であったりする。（１０）式に示される様に、状態量が斉次解と非斉次解との和で表されるのであれば、先ずそれらを切り離して別個に扱い初期条件にて一つに纏めるのが良かろう。斉次解では固有マトリクスに荷重マトリクスを含まない。それで総ての点での条件式は境界条件を含めて右辺がゼロになる。従って未定常数にかかる係数マトリクスの行列式がゼロでなければならない。ここに振動の固有値が決定されよう。ここにおいてこれら総ての条件式のうち一つを除くとこの係数マトリクスは矩形マトリクスとなり一つの未定常数をΩとしてそれにかかる項を右辺へ移行すれば総ての未定常数はΩとの比の値で固有値毎に求まる。一方非斉次解からは荷重マトリクスが右辺に残るので総ての未定常数は一義的に定まる。故に状態量は

$$W = DRGP(\omega n)\Omega n\,exp(i\omega nt) + DR[GN_1p + \langle K(\kappa)\rangle]\,exp(ipt) \qquad (11)$$

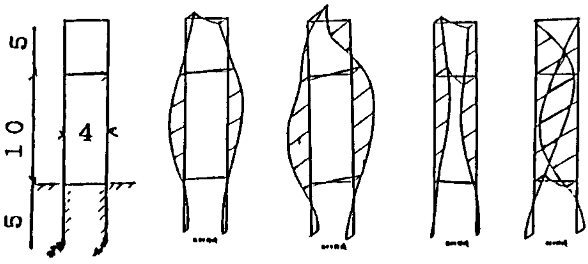
で与えられ、この中のΩnは依然未定である。振動の初期には静止しているとすれば構造物全体の、変位、変位速度ここでは捩じれ角、たわみ角とそれらの角速度をゼロとすることが初期条件になる。この変位と変位速度をフーリエー級数で示しその係数を決定する操作を行えば静止であるが故にフーリエー係数はゼロになり、Ωnに関する連立方程式をうる。この右辺は非斉次解で示される。

$$A\Omega n = B \qquad (12)$$

これで総ての積分未定常数が決定されたので、（１１）式により時間の変化に伴う状態量が明らかになる。

§3.　計算例

振動の固有値
4．698019
7．826798
9．225499
40．297037
44．563499
97．363077
144．691057
164．001533



参考文献：谷本勉之助著　マトリクス構造解析，日刊工業．