I-413 短い切欠が梁の固有値に与える影響度について

熊本大学　学生員　清田 秀二　　熊本大学　学生員　石井 勝敏
八代高専　正　員　水田 洋司　　熊本大学　正　員　平井 一男

1．まえがき：

梁にクラックが生じた場合の固有振動数の変化についての研究が進められているなかで，その変化の大きさが実際にどの程度あらわれるかどうかが問題になっている．そこでこの研究では，破壊（弾性ヒンジ）が生じる前のＳＹＳＴＥＭ Ａ（単純梁）の固有振動数と振動モードをもとにして，構造物の一部が破壊をおこし，弾性ヒンジのような構造になった単純梁の固有振動数と振動モードの解析法を示す．この解析法は，すでに提案されている曲げ荷重を使用する方法を発展させたもので[2]，単純梁をモデルに数値計算を行い従来の方法による結果と比較検討を行った．

2．振動数方程式の導入：

図－１のように，モーメント荷重ＭがX_jの地点に作用したとすると，モーダルアナリシスの考えより次式が成り立つ．

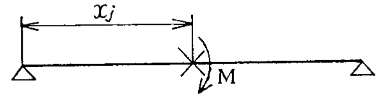

図-1 モーメント荷重Mが作用する梁

$$\ddot{q}_n^M + \lambda_n q_n^M = \Phi_n'(x_j)\cdot M \qquad (1)$$

（１）式をもとに切欠部分をつくるために，X_jの地点に一対のモーメント荷重を作用させると（図－２），次式が成り立つ．

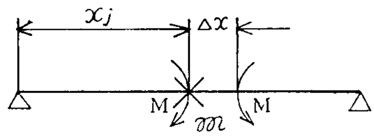

図-2 一対のモーメント荷重𝔪が作用する梁

$$\ddot{q}_n^{\mathfrak{m}} + \lambda_n q_n^{\mathfrak{m}} = -\Phi_n''(x_j)\cdot \mathfrak{m} \qquad (2)$$

n　：モードの次数
Φn　：正規化モード
Φ′n：Φnの微分値
λn　：固有値（＝ ω_n^2）（ω_nは，固有振動数）

$\Phi_n(x)$の変形に対応する曲げモーメントを$M_n(x)$とすると一対のモーメント荷重𝔪による曲げモーメント$M^{\mathfrak{m}}$は

$$M^{\mathfrak{m}} = \sum q_n^{\mathfrak{m}} M_n = \sum M_n \frac{-\Phi_n(x_j)}{\lambda_n - \lambda}\cdot \mathfrak{m} = \alpha\cdot\mathfrak{m} \qquad (3)$$

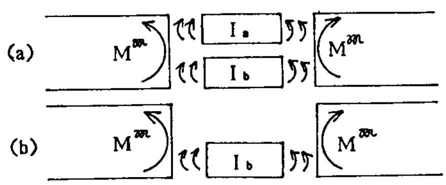

図-3 Mと𝔪の関係

次に図－３について，切欠の部分において取り除く部分と残る部分のＩ（断面２次モーメント）をそれぞれ，Ｉa，Ｉbとし，モーメントはＩに比例して分配されかつ自由振動では外力＝０になることから

$$\frac{I_b}{I_a + I_b}\left(M^{\mathfrak{m}} + \frac{\mathfrak{m}}{\Delta x}\right) = M^{\mathfrak{m}} \qquad (4)$$

の式が成り立つ．$I_a / I_b = k$とおき，$\mathfrak{m} = M^{\mathfrak{m}} / \alpha$を上式に代入すると　$1/\alpha = k\Delta X$　（５）．この式は，図－３(ｂ)の振動数方程式である．次に，単純梁の固有振動数と固有モードは次式で表される．

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \qquad (6) \qquad \omega_n^2 = \lambda_n = n^4\cdot\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\cdot\left(\frac{EI}{\rho}\right) \qquad (7)$$

ここで，Ｌ：長さ，ρ：単位体積重量，Ｅ：ヤング率．また，$\Phi_n''(x)$は$\Phi_n(x)$をｘで二階微分して求められる．故に

$$\Phi_n''(x) = -n^2\sqrt{\frac{2}{\rho L}}\cdot\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \qquad (8)$$

（３），（６），（８）式を（５）式に代入して整理すると

$$\sum \frac{n^4}{n^4 - \lambda'}\cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{L}{2k\Delta x} \qquad (9) \qquad \text{ただし，}\quad \lambda' = \lambda\frac{\rho L^4}{EI\pi^4} \qquad (10)$$

（２）式の解より切欠を持つ系のモード$\phi_m(X)$は

$$\phi_m(x) = \frac{2\cdot L}{EI\pi^2}\sum\frac{n^2}{n^4-\lambda^4}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (11)$$

３．数値計算：

振動数方程式（９）式の右辺をＫと置くとＫは弾性ヒンジ条件となる．Ｋを横軸に，単純梁の振動数ω_0と切欠がある場合の振動数ω_nとの比（Ｒ）を縦軸に取った時の関係をグラフに示すと，図－４のようになる．式で表すと，　$R=\omega_n/\omega_0$　（１１），　$K=L/2\ell\Delta X$　（１２）の様になる．図よりＫ＝２０～３０程度で固有振動数の変化は著しくなってくるが，Ｋ＝１００～２００ではその値は殆ど変化がない．また図－５は，Ｋの値を一定にしたときのℓとＬ／ΔＸとの関係をグラフに示したものであるが，図－４と関連して考えてみると主に斜線部分で固有振動数の変化が生じてくることになる．斜線より下の部分では殆ど固有振動数の変化はなく，例えばＫ＝１００の時，ℓ＝Ｉａ／Ｉｂ＝５０，Ｌ／ΔＸ＝１００００，Ｌ＝２０ｍの場合を考えると，切欠長さは２㎜となる．これを長方形断面で考えると断面高さｈの９／１０にまで及ぶクラックがあっても固有振動数の変化は殆どないことになる．ここで，切欠の長さを１０㎝として具体的に損傷の大きさＸとＫの関係について示したものが図－６である．図よりＫとＸ／ｈの関係は梁の断面形状によりかなり異なるが，いずれの梁においても固有振動数の変化の著しいＫ＝２０～３０において損傷深さは，梁の断面高さの約３０％以上にまで及んでいる．

次に，モードの変化を調べた結果を図－７に示す．図よりモードにおいては切欠が生じても殆ど変化がない．

以上より，固有振動数の変化が生じた場合には梁にとって致命的な損傷が生じた場合と考えられる．

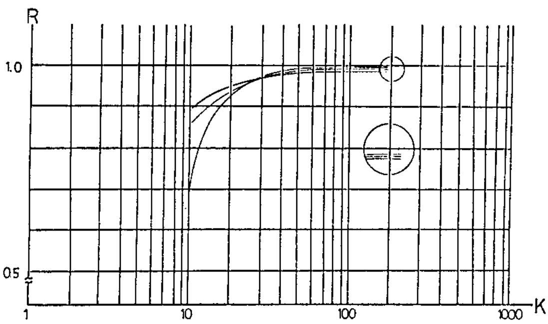

図-4　Kと固有振動数ωnの関係

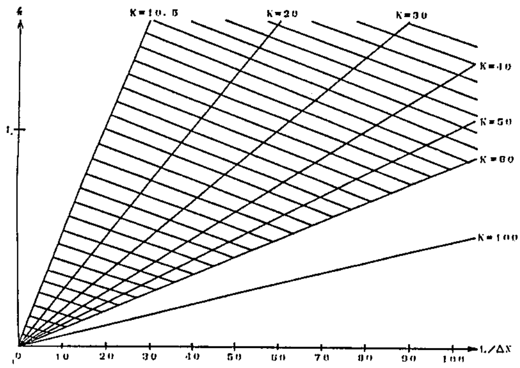

図-5　ℓとL/ΔXとの関係

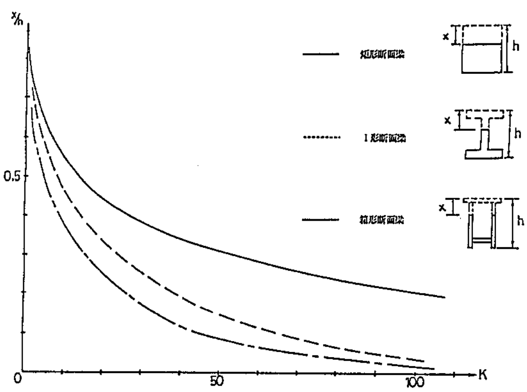

図-6　損傷深さXとKの関係

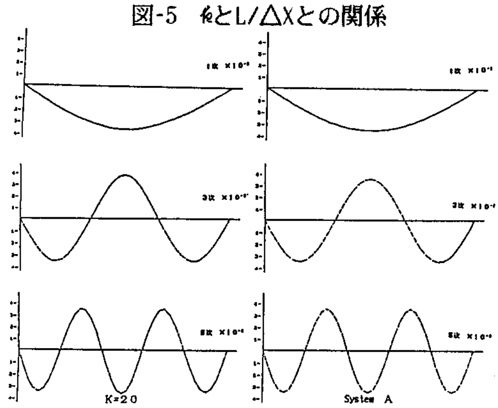

図-7　正規化ﾓｰﾄﾞ

参考文献

（１）古庄 ：弾性ヒンジをもつ梁の固有値解析，昭和４３年度熊大土木卒業論文，昭和４４年２月

（２）平井，吉村：マトリックス構造解析法研究発表論文集，昭和４６年６月