I-412　チェモシェンコ梁の固有関数の直交性に関する基本的考察

八戸工業大学 正会員 穐山 和男

1．はじめに

まず、チェモシェンコ梁の固有関数の直交条件式を変断面まで含む一般面的な場合について誘導する。次にその直交条件式から、等断面の場合の固有関数の直交条件式を誘導する。最後に、等断面梁の固有関数の非直交性について述べる。

2．変断面へ拡張した固有関数の直交条件式

よく知られているように、次のようにチェモシェンコが与えている。[1)]

$$\frac{\partial}{\partial x}\{k(\frac{\partial y}{\partial x}-\phi)\}=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)、\qquad \frac{\partial}{\partial x}(EI\frac{\partial y}{\partial x})+k(\frac{\partial y}{\partial x}-\phi)=\rho I\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2)$$

ここで、y:全たわみ、ϕ:曲げによるたわみ角、ρ:材料の密度、A:横断面の断面積、I:断面２次モーメント、k=KGA、K:せん断係数、G:剛性率、E:ヤング率、x:軸方向座標、t:時間座標

いま、yとϕを

$$y(x,t)=Y(x)\exp(ipt) \quad (3)、\qquad \phi(x,t)=\theta(x)\exp(ipt) \quad (4)$$

とおく。ここで、p:円振動数、$i=(-1)^{1/2}$

(3)、(4)式を(1)、(2)式に代入すると、次の２式を得る。

$$p_m^2(\rho AY_m)=-\{k(Y_m-\theta_m)\}' \quad (5)、\qquad p_m^2(\rho I\theta_m)=-(EI\theta_m')'-k(Y_m'-\theta_m) \quad (6)$$

ここで、m:モードの次数、(′)=d／dx

(5)式にY_n、(6)式にθ_nをかけて，和をとり0からlまで積分すると、

$$p_m^2\int_0^l(\rho AY_mY_n+\rho I\theta_m\theta_n)dx=[-M_m\theta_n-S_mY_n]_0^l+\int_0^l\{EI\theta_m'\theta_n'+k(Y_m'-\theta_m)(Y_n'-\theta_n)\}dx \quad (7)$$

ここで、M=EIθ、S=k(Y′－θ)、l:部材長、n:モードの次数

(8)式の右辺の第一項は、任意の境界条件のもとで0となるから

$$p_m^2\int_0^l(\rho AY_mY_n+\rho I\theta_m\theta_n)dx=\int_0^l\{EI\theta_m'\theta_n'+k(Y_m'-\theta_m)(Y_n'-\theta_n)\}dx \quad (8)$$

同様に

$$p_n^2\int_0^l(\rho AY_nY_m+\rho I\theta_n\theta_m)dx=\int_0^l\{EI\theta_n'\theta_m'+k(Y_n'-\theta_n)(Y_m'-\theta_m)\}dx \quad (9)$$

(8)式から (9)式を引けば

$$(p_m^2-p_n^2)\int_0^l(\rho AY_mY_n+\rho I\theta_m\theta_n)dx=0 \quad (10)$$

m≠nなら

$$\int_0^l(\rho AY_mY_n+\rho I\theta_m\theta_n)dx=0 \quad (11)$$

(11)式は、変断面まで含む固有関数Y、θの直交関係を示す式である。

m=nなら

$$p_m^2=\int_0^l\{EI\theta_m'^2+k(Y_m'-\theta_m)^2dx\Big/\int_0^l(\rho AY_m^2+\rho I\theta_m^2)dx \quad (12)$$

等断面の場合は、ρが一定なら

$$\int_0^l(Y_mY_n+r^2\theta_m\theta_n)dx=0 \qquad ここで、r=(I／A)^{1/2} \quad (13)$$

3．等断面梁の固有関数の非直交性について

T.C.Huangが、次のように２通りの場合について与えている。[2]

（Ｉ）$\lambda < b / (a)^{1/4}$の場合（低次側）

$$u = C_1 \sin(\alpha\xi) + C_2 \cos(\alpha\xi) + C_3 \sinh(\beta\xi) + C_4 \cosh(\beta\xi)$$

$$\theta = D\{C_1 \cos(\alpha\xi) - C_2 \sin(\alpha\xi) + C_3 \cosh(\beta\xi)/(\mu\delta) + C_4 \sinh(\beta\xi)/(\mu\delta)\} \tag{14}$$

ここで、$u=Y/l$、$\xi=x/l$、$a=E/KG$、$b=l/r$、$\lambda=l(p/c_0)^{1/2}$、$c_0=(E/\rho)^{1/2}$、$d=\alpha^2-a\lambda^4/b^2$、$e=\beta^2+a\lambda^4/b^2$、$\mu=\beta/\alpha$、$\delta=d/e$、$D=d/\alpha$、$C_1$から$C_4$:定数

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}b}\left[\pm(a+1)+\{(a-1)^2+4(b/\lambda)^4\}^{1/2}\right]^{1/2}$$

（II）$\lambda > b / (a)^{1/4}$の場合（高次側）

$$u = C_1 \sin(\alpha\xi) + C_2 \cos(\alpha\xi) + C_3 \sin(\beta'\xi) + C_4 \cos(\beta'\xi)$$

$$\theta = D\{(C_1 \cos(\alpha\xi) - C_2 \sin(\alpha\xi) + C_3 \mathrm{con}(\beta'\xi)/(\mu'\delta') - C_4 \sin(\beta'\xi)/(\mu'\delta')\} \tag{15}$$

ここで、$\beta' = \dfrac{\lambda^2}{\sqrt{2}b}\left[(a+1)-\{(a-1)^2+4(b/\lambda)^4\}^{1/2}\right]^{1/2}$

$e'=\beta'-a\lambda^4/b^2$、$\mu'=\beta'/\alpha$、$\delta'=d/e'$

（Ｉ）、（II）の場合のそれぞれの固有関数の直交関係を示す式は、(13)式から次のようになる。

$$\int_0^1 (u_m u_n + \theta_m \theta_n / b^2)\, d\xi = 0 \tag{16}$$

しかし、（Ｉ）の範囲、あるいは（II）の範囲のそれぞれの範囲において成立することであって、（Ｉ）と（II）との固有関数の組合せは、(16)式を満足しない。即ち

$$\int_0^1 (u_m u_n + \theta_m \theta_n / b^2)\, d\xi \neq 0 \tag{17}$$

４．結論

(14)式の固有関数と(15)式の固有関数とは、それぞれの範囲で直交関係が成立する。即ち(14)式のu、θと(15)式のu、θの組合わせは(16)式を満足しない。

最後に、一般的に最も重要な１次から求めることのできる(14)式をチェモシェンコ梁の固有関数と考えるのが自然である。求め得る最高次数はパラメーターａ，ｂにより定まる。

なお、具体的な計算結果については当日発表する。

参考文献

1)S.Timoshenko:Vibration Promblems In Engineering,D.Van Nostrand Company,Toront,London,third edition

2)T.C.Huang:Journal of Applied Mechanics,Vol.28,1961,p.579-584

3)穐山和男:八戸工業大学紀要、第７巻(1988)、p.83-88

4)Lord Rayleigh:Theory of Sound,Dover Publications,second edtion