

## I-411 境界要素法によるはりの固有振動解析について

|         |     |       |
|---------|-----|-------|
| 欄日本情報開発 | 正 員 | 小笠原 集 |
| 岩手大学工学部 | 正 員 | 宮本 裕  |
| 岩手大学工学部 | 正 員 | 岩崎 正二 |
| 岩手大学工学部 | 正 員 | 出戸 秀明 |

## 1. ま え が き

近年、積分方程式と有限要素法で行なわれる離散化手法を組み合わせた境界要素法と呼ばれる解析方法が工学的問題に適用されてきている。境界要素法は境界上の未知節点量だけが最終的に解くべき方程式の未知数となるため、領域型解法よりも低次元のマトリックスを取り扱うことになり、入力データ数や計算時間が大幅に短縮できるという利点がある。そこで本報告では、はりの曲げに関する固有振動解析に境界要素法を適用する。基本解の求まらない変断面のはりに対しては、等断面はりの静的曲げ問題の基本解を用いた定式化を行ない、その計算結果が厳密解とよく一致していることを確かめている。

## 2. 解 析 理 論

図-1に示すようなスパン $l$ の変断面はりの動的曲げ問題の微分方程式は、たわみを $w(x, t) = w(x) \sin \lambda t$ で表わすとき次式で与えられる。

$$E_0 I_0 \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} - \rho \lambda^2 A(x) w(x) = 0 \quad (\lambda: \text{円振動数}) \quad (1)$$

また無限長はりの静的曲げ問題の基本解 $w_0^*(x, y)$ は次式で定義される。

$$E_0 I_0 \frac{d^4 w_0^*(x, y)}{dx^4} = \delta(x, y) \quad (2)$$

式(1)の両辺に式(2)の基本解 $w_0^*(x, y)$ をかけ、はりのスパン $l$ にわたって積分し、 $w(x)$ の微係数がなくなるまで部分積分を繰り返したものが次式となる。

$$\begin{aligned} \alpha(y) w(y) = & [Q(x) w_0^*(x, y) - M(x) \theta_0^*(x, y) + \theta(x) \alpha(x) M_0^*(x, y) \\ & - w(x) \left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M_0^*(x, y) + \alpha(x) Q_0^*(x, y) \right\}]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b w(x) \left\{ \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} M_0^*(x, y) \right. \\ & \left. + \frac{d\alpha(x)}{dx} Q_0^*(x, y) \right\} dx + \rho \lambda^2 \int_a^b A(x) w(x) w_0^*(x, y) dx \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\theta$ 、 $M$ 、 $Q$ はたわみ角、モーメント、せん断力を、\*は基本解に関するものを表わしている。

式(3)をさらに $y$ で微分すると、

$$\begin{aligned} -\frac{d\alpha(y)}{dy} w(y) + \alpha(y) w(y) = & [Q(x) \widetilde{w}_0^*(x, y) - M(x) \widetilde{\theta}_0^*(x, y) + \theta(x) \alpha(x) \widetilde{M}_0^*(x, y) \\ & - w(x) \left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} \widetilde{M}_0^*(x, y) + \alpha(x) \widetilde{Q}_0^*(x, y) \right\}]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b w(x) \left\{ \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} \widetilde{M}_0^*(x, y) \right. \\ & \left. + 2 \frac{d\alpha(x)}{dx} \widetilde{Q}_0^*(x, y) \right\} dx + \rho \lambda^2 \int_a^b A(x) w(x) \widetilde{w}_0^*(x, y) dx \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\widetilde{f} = \partial f / \partial y$ とする。

式(3)と(4)の未知変位 $w(x)$ を含む積分項を Gauss の数値積分公式を用いて展開すると式(5)、(6)、(7)となる。ただし、はりを $n$ 分割しているので分割点でのたわみも未知量となる。

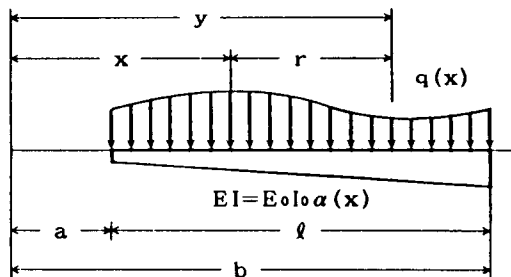


図-1

$$\alpha_j w_j = A_{j,1} Q(b) + A_{j,2} M(b) + A_{j,3} \theta(b) + A_{j,4} w(b) + B_{j,1} Q(a) + B_{j,2} M(a) + B_{j,3} \theta(a) + B_{j,4} w(a) + C_{j,1} w_1 + C_{j,2} w_2 + C_{j,3} w_3 + \cdots + C_{j,n+1} w_{n+1} + \rho \lambda^2 (D_{j,1} w_1 + D_{j,2} w_2 + D_{j,3} w_3 + \cdots + D_{j,n+1} w_{n+1}) \quad (j=1, 2, 3, \cdots, n+1) \quad (5)$$

$$A_{n+2,1} Q(b) + A_{n+2,2} M(b) + A_{n+2,3} \theta(b) + A_{n+2,4} w(b) + B_{n+2,1} Q(a) + B_{n+2,2} M(a) + B_{n+2,3} \theta(a) + B_{n+2,4} w(a) + C_{n+2,1} w_1 + C_{n+2,2} w_2 + C_{n+2,3} w_3 + \cdots + C_{n+2,n+1} w_{n+1} + \rho \lambda^2 (D_{n+2,1} w_1 + D_{n+2,2} w_2 + D_{n+2,3} w_3 + \cdots + D_{n+2,n+1} w_{n+1}) = 0 \quad (6)$$

$$A_{n+3,1} Q(b) + A_{n+3,2} M(b) + A_{n+3,3} \theta(b) + A_{n+3,4} w(b) + B_{n+3,1} Q(a) + B_{n+3,2} M(a) + B_{n+3,3} \theta(a) + B_{n+3,4} w(a) + C_{n+3,1} w_1 + C_{n+3,2} w_2 + C_{n+3,3} w_3 + \cdots + C_{n+3,n+1} w_{n+1} + \rho \lambda^2 (D_{n+3,1} w_1 + D_{n+3,2} w_2 + D_{n+3,3} w_3 + \cdots + D_{n+3,n+1} w_{n+1}) = 0 \quad (7)$$

ただし係数A、B、Cについては参考文献<sup>2)</sup>を参照されたい。

式(5)、(6)、(7)をマトリックス式で表わすと、式(8)のようになる。

$$\begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} + \rho \lambda^2 \begin{Bmatrix} D_{11} & O \\ D_{21} & O \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\{W\} = \{w_1, w_2, \cdots, w_{n+1}\}^T$ 、 $\{Q\} = \{Q(b), M(b), \theta(b), Q(a), M(a), \theta(a)\}^T$ 。

式(8)を解くために、両辺に $(1/\rho \lambda^2) K^{-1}$ をかけ、次式で表わす。

$$\frac{1}{\rho \lambda^2} \begin{Bmatrix} I & O \\ O & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} D_{11} & O \\ D_{21} & O \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ Q \end{Bmatrix} = 0 \quad (9)$$

式(9)について、Eberlein法を用いて固有値問題を解く。

### 3. 数値計算例

表-1は $\ell=2.0\text{m}$ 、 $E I=1.0\text{tm}^2$ 、 $\rho A=1.0\text{t}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^2$ の等断面はりの固有振動数を10分割して計算した結果である。

表-2は、図-2に示すように

$$I = I_0 \left(1 - C \frac{x}{\ell}\right), \quad A = A_0 \left(1 - C \frac{x}{\ell}\right)$$

なる断面を持つ片持ばりの固有振動数を係数Cを変えて計算した結果である。ただし、 $\ell=2.0\text{m}$ 、 $E I_0=1.0\text{tm}^2$ 、 $A_0=1.0\text{m}^2$ 、 $\rho=1.0\text{t}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^4$ 、はりは10分割している。

表-1 等断面はりの第1次固有振動数

| 境界条件  | 厳密解(sec <sup>-1</sup> ) | 計算結果       | 誤差(%)    |
|-------|-------------------------|------------|----------|
| 片持ばり  | 1.8751                  | 1.90765235 | 1.736032 |
| 両端ヒンジ | 3.1416                  | 3.14160059 | 0.000250 |
| 固定ヒンジ | 3.9266                  | 3.92662666 | 0.000680 |
| 両端固定  | 4.7300                  | 4.73010294 | 0.002176 |

表-2 変断面はりの第1次固有振動数

| 係数C  | 厳密解(sec <sup>-1</sup> ) | 計算結果       | 誤差(%)     |
|------|-------------------------|------------|-----------|
| 0.00 | 1.8751                  | 1.90765235 | 1.736032  |
| 0.25 | 1.9598                  | 1.98321683 | 1.194858  |
| 0.50 | 2.0816                  | 2.08677480 | 0.248600  |
| 0.75 | 2.2727                  | 2.24349453 | -1.283475 |
| 1.00 | 2.6758                  | 2.53137044 | -5.397625 |

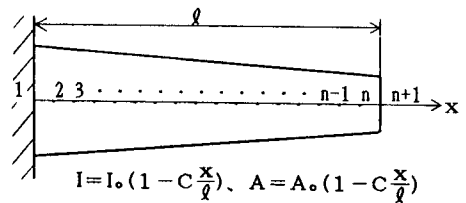


図-2

### 【参考文献】

- 1) チモシェンコ：工業振動学、東京図書
- 2) 出戸秀明・宮本裕・岩崎正二：境界積分方程式による変断面はりの解法、岩手大学工学部研究報告第37巻、昭和59年12月、p153-162
- 3) 小笠原集・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明：境界要素法による変断面はりの固有振動解析、東北支部技術研究発表会講演概要、昭和63年3月、p26