I-334　吊橋主塔の動的等価系について

住友重機械工業㈱　正員　北原俊男
住友重機械工業㈱　正員　○谷本　健

1. はじめに

吊橋や斜張橋のような柔構造物では耐風安定性の確保が大きな課題である。風洞実験に当たっては、桁・ケーブル・主塔の耐風性の検討と同時に、それぞれの動的な相関性の評価も求められる。桁構造については定式化されているが、主塔だけの構造系で完成時の実験をする方法はまだ確立していない。本文では主塔の部分模型を用いて完成系での主塔の耐風性能を検証するため理論的検討を行い、実験方法を提案する。これにより実橋と主塔部分模型の動的対応関係が明確になり、模型の設計精度向上が可能になる。

一般的に振動特性を把握するためにＦＥＭの固有値解析が行われる。吊橋の全体数値解析モデル（全体モデル）により、主塔モードを抽出する事は容易であるが、主塔の部分数値解析モデル（部分モデル）で、全体モデルの主塔モードと一致した構造系を決める事は容易ではない。全体モデルの一組の固有値と固有ベクトルが一致する部分モデルを動的等価系として下記について述べる。

①自由度縮小により動的等価系に置換する時の条件式を解析的に求める。

②条件式に物理的考察を加え、部分モデルの動的等価置換方法を検討する。

③動的等価部分モデルを示し、モードを比較する。（計算方法などの詳細は当日のＯＨＰで示す。）

2. 自由度縮小と動的等価置換の条件式

全体モデルの質量行列M，剛性行列S，固有値λ，固有ベクトルϕ（カラムベクトル）とする。(1)式はmモードの減衰項を無視した振動方程式である。但し、λ，ϕの添字mは省略する。ϕ^Tを前掛けし分配すると(2)式になり$\phi^T M\phi=1$と質量正規化するとレーレー商が得られる。

$$(-\lambda M+S)\,\phi=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1) \qquad -\lambda\phi^T M\phi \;+\; \phi^T S\phi=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

同様に、部分モデルの質量行列M'，剛性行列S'，固有値μ，固有ベクトルφとすると(3)式が成り立つ。

$$-\mu\varphi^T M'\varphi \;+\; \varphi^T S'\varphi=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

全体モデルの総自由度をNとし主塔だけの自由度をnとする。部分モデルの総自由度をKとし主塔だけの自由度は全体モデルと同一のnである。自由度の関係はN≧K≧nで、部分モデルは自由度が縮小されている。

両モデルの固有ベクトルϕ，φ、質量行列M，M'、剛性行列S，S'を主塔と主塔以外に分解する。固有ベクトルの添字nは両モデルとも主塔を示し、添字j，kは主塔以外を示す。質量行列，剛性行列の添字nnは両モデルの主塔を示し、主塔を共有するから行列が一致する。添字jj，kkは主塔以外を示し、剛性行列の添字nj，nkは主塔と主塔以外の相関項(cross term)を示す。但し、M，M'は集中質量で対角項のみとし、S，S'は対称とする。また0は零行列を示す。

$$\phi=\begin{bmatrix}\phi_n\\ \\ \phi_j\end{bmatrix},\ \varphi=\begin{bmatrix}\varphi_n\\ \\ \varphi_k\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}M_{nn}, & 0\\ & \\ 0, & M_{jj}\end{bmatrix},\ M'=\begin{bmatrix}M_{nn}, & 0\\ & \\ 0, & M_{kk}\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}S_{nn}, & S_{jn}\\ & \\ S_{nj}, & S_{jj}\end{bmatrix},\ S'=\begin{bmatrix}S_{nn}, & S_{kn}\\ & \\ S_{nk}, & S_{kk}\end{bmatrix}$$

動的等価の条件は、主塔卓越モードにおいて全体モデルと部分モデルの固有値が一致する条件式(4)と主塔部分の固有ベクトルが一致する条件式(5)であり、2式を同時に満足する必要がある。

$$\lambda=\mu \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4) \qquad\qquad \phi_n=\varphi_n \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

上記の固有値，固有ベクトル，質量行列，剛性行列の関係を(2)，(3)式に代入し、μ，φ_n，M_{nn}，S_{nn}を消去すると、動的等価系の条件式(6)が導かれる。

$$-\lambda\phi_j^T M_{jj}\phi_j \;+\; 2\phi_j^T S_{nj}\phi_n \;+\; \phi_j^T S_{jj}\phi_j$$
$$+\lambda\varphi_k^T M_{kk}\varphi_k \;-\; 2\varphi_k^T S_{nk}\phi_n \;-\; \varphi_k^T S_{kk}\varphi_k \;=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

3. 物理的考察と動的等価置換の方法

(6)式は２次形式と双１次形式によるスカラー式でエネルギー式である。この式には固有値λと主塔固有ベ

クトルϕ_nが残っている。上段は既に決っている全体モデルで、下段は動的等価置換を行うべき部分モデルである。両モデルは本来多数のモードが含まれており、それらのモードのある一組の固有値と主塔固有ベクトルが一致するという条件である。計６項から成り、各項をエネルギー的側面から検討すると下記になる。

①上段第１項　：　全体モデルの主塔以外の運動エネルギー
②上段第２項　：　全体モデルの主塔と主塔以外の間の歪みエネルギーの相関項
③上段第３項　：　全体モデルの主塔以外の歪みエネルギー
④下段第１項　：　部分モデルの主塔以外の運動エネルギー
⑤下段第２項　：　部分モデルの主塔と主塔以外の間の歪みエネルギーの相関項
⑥下段第３項　：　部分モデルの主塔以外の歪みエネルギー

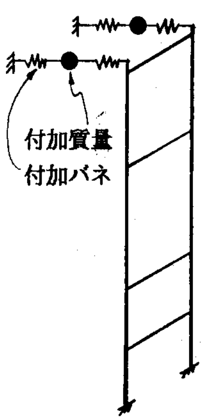
運動エネルギーの相関項が発生しないのは集中質量のためで、適合質量の場合には運動エネルギーの相関項が発生し、更に複雑なエネルギー条件式になる。②と⑤は歪みエネルギーの相関項で、主塔モードϕ_nと主塔以外のモードϕ_j, ϕ_kの次数が異なるためS_{nj}, S_{nk}は長方形行列である。エネルギー総和が０である事は、自由度縮小前後のエネルギーが等しい事を示している。(6)式は解析式として導出し、モード形状も限定していないので、主塔に限らず理論的には他の構造物の動的等価置換も可能である。

動的等価部分モデルの構造系を決定するに当たって、(6)式の特徴は下記である。

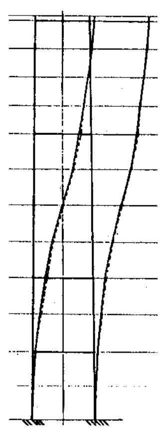
①具体的な動的置換方法は別として、主塔の高次モードでも動的等価置換が可能である。
②動的等価置換では、運動エネルギーだけでなく歪みエネルギーも考慮する必要がある。
③１モードに限定すると１本のスカラー式であるから、動的等価部分モデルが沢山存在する。
④従って、構造系決定では質量行列M_{kk}、剛性行列S_{kk}, S_{nk}にかなりの任意性がある。
⑤動的等価置換が必ず可能な一番簡単な自由度kは、主塔の自由度＋１ (K=n+1) である。
⑥質量行列M_{nn}と剛性行列S_{nn}を両モデルで一致させると、精度が上がる。

４．動的等価部分モデルと計算結果

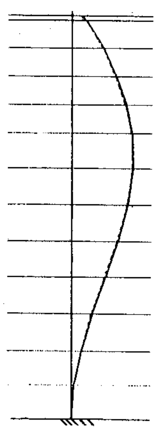
前述の①～⑥に従った動的等価部分モデルの概念図を図－１に示す。主塔橋軸直角１次，主塔橋軸１次，主塔ねじり１次のモード比較図を図－２～４に示す。破線が全体モデルで実線が等価部分モデルである。



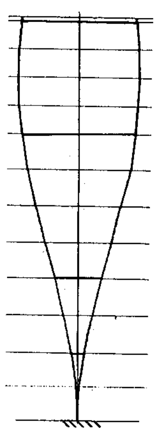
図－１



図－２橋軸直角１次



図－３橋軸１次



図－４ねじり１次

５．あとがき

本理論式では構造物の歪みエネルギーまで含んでおり、等価質量の概念の拡張とも考えられ、一般構造物への拡張が保証されている。但し、付加した自由度の動的境界条件が単純でないと、構造系を一意的に決定する事は困難になる。当然の事であるが、桁・ケーブルの主塔に対する風の影響は無視している。