

I-317

渦動粘性を導入した非定常流れ有限要素解析の安定性に関する一検討

○東京工業大学 学生員 中村智樹

東京工業大学 正員 野村卓史

1. はじめに

Large-Eddy Simulation(LES)を、有限要素法と Balancing Tensor Diffusivity(BTD)法とに基づいて行う際、要素寸法、流速、渦動粘性などが空間的、もしくは時間的に変動する状況下で、安定に計算を進めるための積分時間間隔 Δt のとり方についての目安が必要となってくる。ここでは、Greshoらの安定条件式¹⁾を修正し、これを具体的な解析に適用して検討した。

2. 基礎方程式および解析過程

LESでは、Navier-Stokes方程式および連続条件式に空間的かつ局所的にフィルターをかけ、すべての変数を格子平均量と変動分に分けることによって、変動分からなる渦動粘性係数 K を導入した平均量に関する運動方程式を基礎としている。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + \frac{\rho}{3} \overline{u_k u_k}) + (\nu + K) \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (2)$$

ここで $(\bar{\quad})$ はフィルターによる平均量、 $(\quad)'$ は変動分を表す。本研究では、式(1)、(2)において $\bar{u}_3=0$ とすることにより、実質上二次元問題としている。

また、渦動粘性係数 K は以下に示される Smagorinskyモデルを用いる。

$$K = (C\Delta)^2 [2\{(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \bar{v}}{\partial y})^2\} + (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x})^2]^{1/2} \quad \dots (3)$$

ただし、 $C=0.1$ 、 $\Delta = (\Delta x \Delta y)^{1/2} = A^{1/2}$ 、 $\Delta x, \Delta y$: フィルター幅、 A : 要素面積 とした。

時間積分法には、式(4)のように、流速の時間に関する2階微分項を空間に関する2階微分で置き換えるBTD法を用いる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \approx \frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \approx \frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} (\bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{u}\bar{v} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}) \quad (\text{at } t=t_n) \quad \dots (4)$$

これにより、式(1)の粘性項は、新たに人工粘性が加わった形となる。

以上の式を用いて、流速線形分布、圧力一定の要素により有限要素方程式を立て、各時間ステップごと圧力、流速の順に求めていく²⁾。

3. 安定条件式

Greshoらは、Neumannの方法により、一次の中央差分を用いて離散化した一次元移流拡散方程式における、BTD法の安定条件式を次のように示している。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{k[1 + \{1 + (u\Delta x/k)^2\}^{1/2}]} \quad (k: \text{拡散係数}) \quad \dots (5)$$

本解析では、対象が二次元であり、また、要素寸法が一定でないこと、流速、渦動粘性が空間的、時間的に変化すること、などのため式(5)は使えない。そこで次のように修正して用いる。

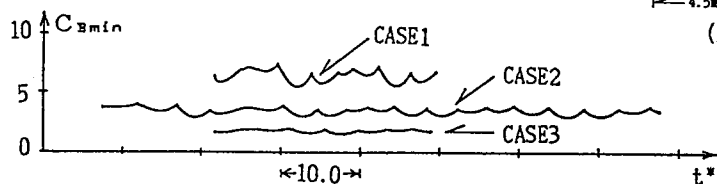
$$C_B = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{(\nu + K)[1 + \{1 + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)(\Delta x^2 + \Delta y^2)\}^{1/2}]/(\nu + K)^{1/2}} / \Delta t \quad \dots (6)$$

流速には要素中央で代表させた値を用い、全要素について C_B を求め、その最小値 C_{Bmin} を評価する。

4. 検討例

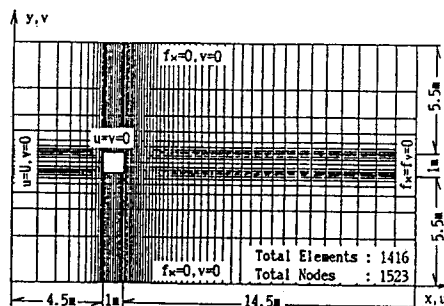
解析対象を図1に示す正方形角柱まわりの流れとし、左端境界に迎角 0° の一様流速を与える。Re=600において、4種の Δt で検討したところ、 C_{Bmin} は図2のように各ステップごと異なる値をとるが、これがおおよそ1.5以上となっていれば計算は安定であった(表1)。 C_{Bmin} は無次元時間間隔 Δt^* と対応しており、 Δt^* と C_{Bmin} の積がおおよそ0.06となっていることがわかる。これらの検討を踏まえ、境界流速のみを変化させReを10,000まで上げて解析した CASE5, CASE6についても、表1に示したような結果を得た。以上より、本解析においては、要素ごとに求まる C_B の最小値 C_{Bmin} がおおよそ1.5以上であれば計算は安定となり、その値は Δt^* で設定できると言える。

図3、図4はそれぞれ CASE5の揚力最大時における流速ベクトル図、 C_B の分布図である。後者より、角柱の上流側角付近の要素において、条件が最も厳しくなっていることがわかる。

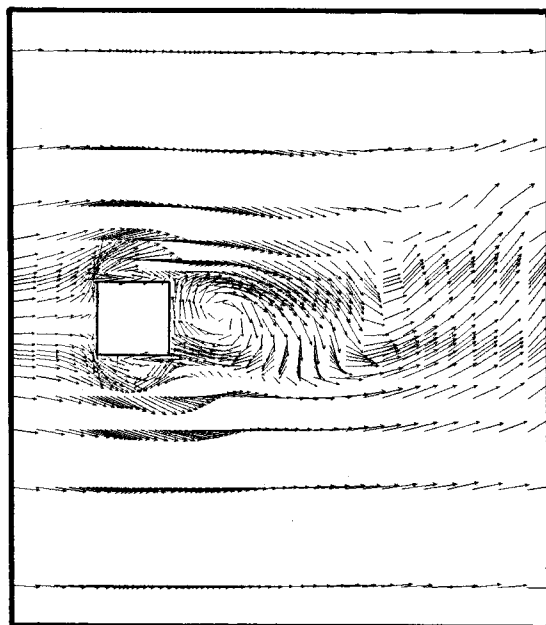
(図2) C_{Bmin} の時間変化 (Re=600)

(表1) 設定条件および計算結果

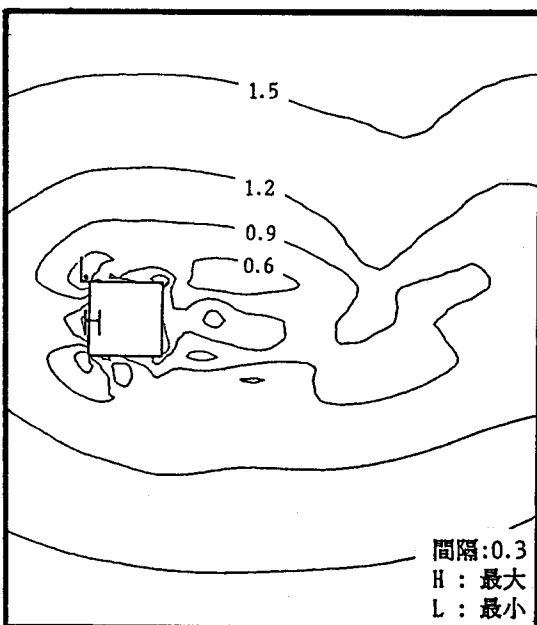
	Re	Δt^*	結果	C_{Bmin}
CASE1	600	0.01	安定	5.6
CASE2	600	0.02	安定	3.0
CASE3	600	0.04	安定	1.5
CASE4	600	0.06	発散	1.1
CASE5	10,000	0.04	安定	1.5
CASE6	10,000	0.06	発散	1.1



(図1) 解析領域および境界条件



(図3) 流速ベクトル図 (CASE5)

(図4) $\log C_B$ の分布図 (CASE5)

参考文献 1) P.M.Gesho et al.: Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, 1984 2) 飯島, 野村: 第42回年講, I-313, 1987