I-316　２段階陽的有限要素法による圧縮性流れの解析に関する一考察

○正員　三井造船㈱　平野　廣和
正員　中央大学　川原　睦人

１．はじめに

著者らは、２段階陽的有限要素法による非圧縮性流れの解析に音速法を適用することにより、多くの成果を挙げてきた。この方法は、温度と密度を一定とすることにより、音速が定数となることから、微量の圧縮性を含むものの非圧縮の流れが表現できる方法である。ところで、トンネル工事におけるトンネル内での発破作業時の換気や衝撃波の伝播、高速列車がトンネルを通過する時発生する衝撃波の伝播の問題などは、非圧縮性の流れとして取り扱うには無理な場合が多い。このため、圧縮性の流れとして扱う必要がある。しかし、この種の問題は、全体的に見て局部的な部分を除き、温度がほぼ一定と扱えることが多いので、温度・密度を未知数として圧縮性流れの基礎方程式を解析するより、温度が一定の仮定を入れた圧縮性流れの基礎方程式を解析する方が効率良いと考えられる。本報告では、従来の音速法の密度一定の仮定をなくし、温度が一定という仮定のみの条件下で再度定式化した考え方について論ずることとする。

２．音速法による圧縮性流れの基礎方程式

２．１　連続の方程式

圧縮性が存在する流れに対して、圧力Ｐと密度ρの関係は、次の状態方程式で結ばれている。

$$P=\chi\rho^{\gamma} \tag{1}$$

$$C^2=\frac{\partial P}{\partial \rho}=\chi\gamma\rho^{\gamma-1} \tag{2}$$

ここでＣは音速、χは比例定数、γは比熱比である。質量保存の法則は、次のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

ここでＵ，Ｖは流速を表す。式 (2)を時間ｔ及びｘ，ｙで微分すると、次の３つの式が誘導される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{2}{\gamma-1}\rho\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial t} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{2}{\gamma-1}\rho\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{2}{\gamma-1}\rho\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial y} \tag{6}$$

式 (3)に式 (4)～(6) の関係を代入し整理すると、次の方程式を得ることができる。

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\gamma-1}{2}C\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{7}$$

ここで誘導した方程式 (7)を連続の方程式とする。

２．２　運動の方程式

流れの運動を支配する方程式には Navier-Stokesの方程式を用いる。この式を総和規約を用いて表すと

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j v_{i,j}\right)+p_{,i}-\kappa v_{k,ki}-\mu\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right)_{,j}-\rho f_i=0 \tag{8}$$

となる。ここで、ｖ　は流速、κは体積粘性係数、μはせん段粘性係数、ｆ　は外力をそれぞれ表す。
式 (1)をｘ，ｙで微分し、式 (5),(6)に代入すると圧力の微分項に関して次の関係を得ることができる。

$$P_{,i}=C\frac{2}{\gamma-1}\rho C_{,i} \tag{9}$$

式 (9)を式 (8)に代入して整理すると、次の式を得ることができる。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\,v_{i,j}+\frac{2}{\gamma-1}\,C\cdot C_{,i}-\lambda v_{k,ki}-\nu\,(v_{i,j}+v_{j,i})_{,j}-f_i=0 \qquad (10)$$

ここで誘導した方程式(10)を運動の方程式とする。

以上により、温度が一定で、流速と音速を未知数とする圧縮性流れの基礎方程式が誘導できた。

3．有限要素法の適用

圧縮性流れの運動の方程式(10)と連続の方程式 (7)に Galerikin法を適用し、運動の方程式の粘性項に部分積分をほどこした上で有限要素方程式に定式化する。解析領域は三角形要素で離散化し、流速・音速ともに式(11)に示すように一次の形状関数で内挿補間する。式(10),(7)より、次の有限要素方程式を誘導する。

$$v_i=\Phi_\alpha v_{\alpha i}\ ,\quad v_i^*=\Phi_\alpha v_{\alpha i}^*\ ,\quad C_i=\Phi_\alpha C_{\alpha i}\ ,\quad C_i^*=\Phi_\alpha C_{\alpha i}^* \qquad (11)$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{v}_{\beta i}+K_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta j}u_{\gamma i}+A_{\alpha\beta\gamma}C_\beta C_\gamma+S_{\alpha\beta}u_{\beta j}=\hat{\Omega}_{\alpha i} \qquad (12)$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{C}_\beta+B_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta i}C_\gamma+G_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta i}C_\gamma=0 \qquad (13)$$

また、各係数マトリックスは、以下に示す通りとなる。

$$M_{\alpha\beta}=\int_V(\Phi_\alpha\cdot\Phi_\beta)\,dV \qquad G_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\gamma-1}{2}\int_V(\Phi_\alpha\cdot\Phi_{\beta,i}\cdot\Phi_\gamma)\,dV$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}=\int_V(\Phi_\alpha\cdot\Phi_\beta\cdot\Phi_{\gamma,j})\,dV \qquad A_{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{\gamma-1}\int_V(\Phi_\alpha\cdot\Phi_\beta\cdot\Phi_{\gamma,i})\,dV$$

$$B_{\alpha\beta\gamma}=\int_V(\Phi_\alpha\cdot\Phi_\beta\cdot\Phi_{\gamma,i})\,dV$$

$$S_{\alpha i\,\beta j}=\lambda\int_V(\Phi_{\alpha,i}\cdot\Phi_{\beta,j})\,dV$$

$$+\nu\int_V(\Phi_{\alpha,i}\cdot\Phi_{\beta,j})\,dV+\nu\int_V(\Phi_{\alpha,k}\cdot\Phi_{\beta,k})\,\delta_{ij}dV$$

$$\hat{\Omega}_{\alpha i}=\int_{S_2}(\hat{\Phi}_\alpha R_i)\,dS+\int_V(\Phi_\alpha F_i)\,dV$$

式 (12),(13)解析領域全体における有限要素方程式である。ところで、両方の式には時間微分項が入っているため、時間方向への離散化を考えなくてはならない。時間方向への離散化には、非圧縮流れで有効性が確認されている２段階陽的解法を適用し、式(14)～(17)に示す２段階陽的有限要素方程式を誘導する。

<Step-1>

$$\bar{M}_{\alpha\beta}v_{\beta i}^{n+\frac{1}{2}}=\bar{M}_{\alpha\beta}v_{\beta i}^n-\frac{\Delta t}{2}\,(K_{\alpha\beta\gamma}\,v_{\beta j}^n\,v_{\gamma i}^n$$

$$+A_{\alpha\beta\gamma}C_\beta^n C_\gamma^n+S_{\alpha\beta}v_{\beta j}^n+\hat{\Omega}_{\alpha i}^n) \qquad (14)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}C_{\beta i}^{n+\frac{1}{2}}=\tilde{M}_{\alpha\beta}C_{\beta i}^n-\frac{\Delta t}{2}\,(B_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta i}^n\,C_\gamma^n+G_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta i}^n\,C_\gamma^n) \qquad (15)$$

<Step-2>

$$\bar{M}_{\alpha\beta}v_{\beta i}^{n+1}=\bar{M}_{\alpha\beta}v_{\beta i}^n-\Delta t\,(K_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta j}^{n+\frac{1}{2}}v_{\gamma i}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$+A_{\alpha\beta\gamma}C_\beta^{n+\frac{1}{2}}C_\gamma+S_{\alpha\beta}v_{\beta j}^n+\hat{\Omega}_{\alpha i}^n) \qquad (16)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}C_\beta^{n+1}=\tilde{M}_{\alpha\beta}C_\beta^n-\Delta t\,(B_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta i}^{n+\frac{1}{2}}\,C_\gamma^{n+\frac{1}{2}}+G_{\alpha\beta\gamma}v_{\beta i}^{n+\frac{1}{2}}\,C_\gamma^{n+\frac{1}{2}}) \qquad (17)$$

ここで、Δtは時間増分、$\bar{M}_{\alpha\beta}$は集中化行列を、$\tilde{M}_{\alpha\beta}$は $\tilde{M}_{\alpha\beta}=e\bar{M}_{\alpha\beta}+(1-e)M_{\alpha\beta}$で表される配分行列である。式(14)～(17)を逐次時間積分することにより、圧縮流れの解析を進めるものとする。

4．終わりに

非圧縮流れにおける音速法の仮定条件を見直すことにより、温度一定の仮定条件から、流速と音速を未知数とする圧縮性流れの方程式を誘導することができた。また、この方程式系に２段階陽的有限要素法が適用できることもわかった。

＜参考文献＞①．足立；圧縮流れの解析，流れの解析のための有限要素法入門コーステキスト，1981

②．藤野，山田；有限要素法による圧縮流体解析，日本鋼構造協会第５回大会講演集，1971