I-298　トラッキング問題に関する数値解析法の比較

○中央大学　学生員　田中裕二
中央大学　正員　川原睦人

1．はじめに

今日まで、構造物の耐震設計は、地震の力に耐えられるようにする耐震構造や、構造物と地盤との間にバネを挿入する事により、建物に伝わる地震力を弱める免振構造など受動的な振動制御が中心になってきた。

しかしここ数年構造物に作用する外力の特性をキャッチし、構造物に組込んだ装置によって、変位を制御しようという能動的な振動制御が検討されはじめている。　一般にこの問題は、トラッキング問題と呼ばれる最適制御問題に置換える事が出来る。　そこで、本研究では、この問題の解法に当たって従来から提案されている方法のうち共役勾配法(Fletcher-Reeves法)、Sakawa-Shindo による方法、ダイナミックプログラミングを用いる方法の３つを取上げ、集中質量を持つ構造物に外力として余弦波地動が作用した場合を例とし、数値解析的立場より、それぞれの方法の有効性の比較検討を行ったので報告する。

2．運動方程式

構造物に地震動が作用した場合の状態方程式は、制御力を考慮すると次のように書き表す事が出来る。

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t) \tag{1}$$

ここで、$x(t)$は、変位と速度を表すベクトル、$u(t)$は、制御力ベクトルであり、$f(t)$は、外力を表すベクトル、Aは(i, i), Bは(i, j) 行列である。

初期条件は、　$x(t_0) = \hat{x}_0$　とする。　(2)

次に最適制御の評価関数として、応答$x(t)$と制御力$u(t)$のエネルギー量として次の関数を設定する。

$$J(x, u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \tag{3}$$

ここでS、Rは、重み係数行列、t_0、t_f は、制御時間の始点、終点である。地震動を受ける構造物の最適制御問題は、(1)、(2) 式のもとで、(3) 式が最少になるような制御力を決定する問題として定式化される。　これは、式(1) に非同時項$f(t)$を含んでいるので、トラッキング問題と言われている。　ここで乗数ベクトルpを導入し、ハミルトニアンHを次のように定義する。

$$H = \frac{1}{2}x^TSx + \frac{1}{2}u^TRu + p^T(Ax + Bu + f) \tag{4}$$

オイラーの方程式と横断性の条件より

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Sx - A^Tp \tag{5}$$

$$p(t_f) = 0 \tag{6}$$

となり、又uについての拘束条件がないときは、

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^Tp = 0 \tag{7}$$

となる。　式(7) よりuを求め、式(1)、(5) に代入するとこの問題は、式(1)、(5) と式(2)、(6) より２点境界問題となる。この問題を解くために共役勾配法と、Sakawa.Shindo による方法を適用したので、各手法の特徴を簡単に説明する。

3．共役勾配法

初めに最適操作量の予想値 $u_0(t)$ を与えて、式(1)、(2) を解き、$x_0(t) = x(t:u_0)$ を得る。　次に式(5) (6) を逆時間で解き、$p_0(t) = p(t:u_0)$ を得る。この２つより評価関数Jの勾配を計算し、最適操作量の予想値を修正し繰返し計算により解を得る方法である。

I．Sakawa.Shindo による方法

共役勾配法の発散を抑えるために、ハミルトニアン H_i を次のように変形する方法を提案している。

$$K_i = H_i + (u_i - u_{i-1})^T C_i (u_i - u_{i-1}) \tag{8}$$

ここで C_i は、非負の定数を対角要素とする対角行列である。uについて拘束条件がないものとし、操作量を求めると

$$u_i(t) = -[R + 2C_i]^{-1}(B^T(t)p_{i-1}(t) - 2C_i u_{i-1}(t)) \tag{9}$$

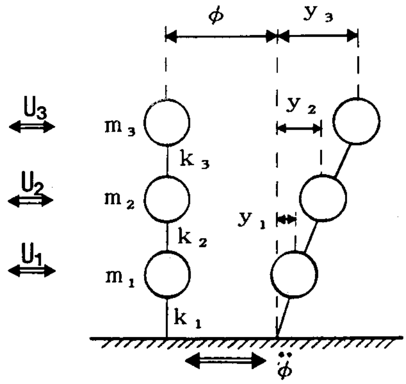
となり、これを利用し最適操作量の予想値を修正し繰返し計算により解を得る方法である。

5．ダイナミックプログラミングを用いる方法

最適性の原理を利用し、状態方程式と評価関数を時間方向に離散化し、0段からN－1段までのN段決定問題と考え最適操作量を決定する方法である。

6．数値解析例

バネ定数K_1＝2000(ton/m)、K_2＝K_3＝1000(ton/m)、減衰定数h＝0.02、重量W_1＝W_2＝W_3＝10(ton)の3自由度系の構造物に加速度$\ddot{\phi}$＝300COSωt(cm/S)ω＝20(rad/s)の地動が作用する場合について解析を行った。ここでmは構造物の質量、yは構造物の支点からの変位、ϕは地動変位、uは操作量である。ここで重み係数行列Sは単位行列と又Rは対角行列とした。



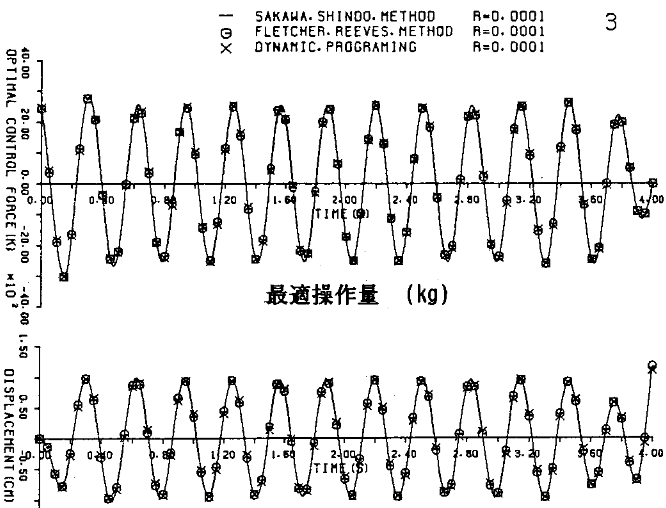
図－1

7．解析結果

図－2は、Rの対角要素の値をすべて1.0 ×10^{-4}とした時の最適操作量と相対変位を比較したものである。 図－3は、最適制御解析を行った場合の各々の手法の計算時間を比較したものである。図より共役勾配法は、自由度数が増加すると計算時間が急激に増加するのがわかる。

8．結論

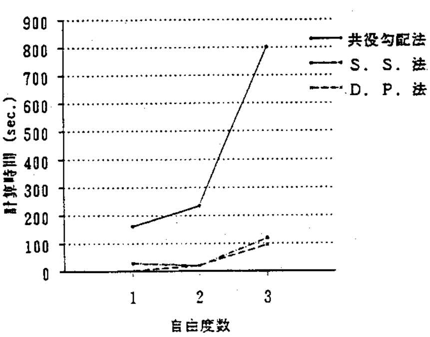
共役勾配法は、問題の自由度が増加しても記憶容量はほとんど線形にしか増加しないという利点がある。しかし計算時間の面からみると3つの手法の中で一番劣っている。Sakawa.Shindoによる方法は、共役勾配法と同様に記憶容量の面と又計算時間の面でも有効な手法と考えられる。しかし調整パラメータ C_i の初期値を適切に選ばなければ計算時間が増大してしまう事がある。又両手法とも繰返し計算法のため収束の判定の基準を適切に選ばなくてはならないという問題がある。ダイナミックプログラミングを用いる方法は、繰返し計算法でないため計算が安定しており又時間間隔△tを他の手法と比べて大きくとる事ができるので計算時間、記憶容量の両面で有効な手法ではあるが問題の自由度が増加すると記憶容量を非常に多く必要とする問題点がある。



最適操作量 (kg)

相対変位 (cm)

図－2



図－3