

I-286 混合変数を用いた双対法によるトラス構造物の最適化に関する考察

愛媛大学大学院 学生員 ○浅井 一浩
愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二

1. まえがき

著者の一人は、これまでに、双対法および近似の概念にもとづく方法により、構造物の各部材要素の最適断面寸法、使用材種および構造物の幾何形状を決定する方法に関する研究を行ってきた¹⁾。これらの方法においては、目的関数を原設計変数の一次の項の和で表わすとともに、制約条件を原設計変数の逆数で一次近似して近似の設計問題を作成し、この双対問題をニュートン法により解き最適解を決定している。本研究では、上記の近似設計問題を目的関数及び制約条件の一次の偏微係数の符号により、原設計変数あるいはその逆数を用いて設計空間を設定する方法²⁾について考察し、従来の方法との比較検討を行ったものである。

2. 混合変数を用いた構造物の近似設計問題の設定

混合変数を用いた近似設計問題は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & W(X) = \sum_{(+)} W_i X_i - \sum_{(-)} W_i \frac{1}{X_i} \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{subject to} \quad & g_j(X) = U_j + \left(\sum_{(+)} h_{ij} X_i \right)^{0.2} \frac{1}{X_i} - \sum_{(-)} h_{ij} X_i \leq 0 \quad (j=1, \dots, q) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに W_i : 単位量当りの目的関数の値, U_j : 定数項, q : 制約条件の数, n : 設計変数の数
 $h_{ij} = -\partial g_j(X^0) / \partial X_i$, Σ : 正の係数の総和, Σ : 負の係数の総和
 $(+)$ $(-)$

式(1)のように目的関数と制約条件を表わすと、この近似設計問題は原設計問題に対して控えめで、かつ完全に凸空間を形成することとなる。

3. トラスの幾何形状最適化問題への応用

2. で定式化した混合変数を用いた近似設計問題を、トラス構造物の各部材の断面積 $A = [A_1, \dots, A_n]^T$ および格点の高さ $Y = [Y_1, \dots, Y_p]^T$ を設計変数とし、応力およびたわみの制約条件を考慮する最適設計問題に適用した。目的関数 W としてトラスの重量を考えると、 A および Y に関して線形化された目的関数の変化量 ΔW を目的関数とし、これを最小化する問題として定式化することができる。(文献(1)参照) また、制約条件 g_j は、 A および Y に関して混合変数を用いて次のように線形近似される。

$$g_j(X^0 + \Delta X) = \sum_{i=1(+)} C_{ij} A_i^{0.2} \frac{1}{A_i} - \sum_{i=1(-)} C_{ij} A_i + \sum_{k=1(+)} D_{kj} Y_k^{0.2} \frac{1}{Y_k} - \sum_{k=1(-)} D_{kj} Y_k + \text{CONST} \quad (2)$$

ただし $a + b = m$, $c + d = p$, CONST : 定数項

$$C_{ij} = -\frac{\partial g_j}{\partial A_i} = -\frac{\partial |N|_j}{\partial A_i} \cdot \frac{1}{A_i}, \quad D_{kj} = -\frac{\partial g_j}{\partial Y_k} = -\frac{\partial |N|_j}{\partial Y_k} \cdot \frac{1}{A_i}$$

たわみの制約条件の場合

$$C_{ij} = -\frac{\partial g_j}{\partial A_i} = -\frac{\partial |\delta|_j}{\partial A_i}, \quad D_{kj} = -\frac{\partial g_j}{\partial Y_k} = -\frac{\partial |\delta|_j}{\partial Y_k}$$

式(2)の混合変数を用いた近似制約条件を考慮し、文献(1)で述べた方法によりラグランジュ関数 $L(\lambda, A, Y)$ を導入し、 λ , A , Y の反復改良を繰り返すことにより最適解を決定することができる。なおトラス構造物では、 Y の変化が設計空間におよぼす影響が A と比較してきわめて大きいことより、本研究では Y の1回当りの許容変化領域を制限する Move Limit (YML) の条件を付加している。なおYMLの大きさは設計において支配的となる制約条件の内容により異なる値を採用している。

4. 設計例および考察

3. で述べた混合変数を用いた双対法(New Dual)と従来の逆変数による近似を行った双対法(Dual)により種々のトラス構造物の製作費の最適設計を行い、両方法の比較を行った。これらの設計問題では、材料の単位体積当りの相対的な製作費を5.10、材料の許容応力度を $\sigma_a = 2400 \text{ kg/cm}^2$ 、ヤング率を 2100000 kg/cm^2 と仮定している。

(1) 2部材トラス

図-1に示す2部材トラスについて、応力制限 $\sigma \leq 2400 \text{ kg/cm}^2$ 、および、たわみ制限 $\delta \leq 1.0 \text{ cm}$ 、 $\delta \leq 0.50 \text{ cm}$ のもとで最適設計を行った。その改良過程をそれぞれ図-2および図-3に示す。この例では $YML=10\%$ とした。図-2は応力制限が支配的、図-3ではたわみ制限が支配的となる設計問題である。これらの図より明らかなように、いずれの方法においても最適解へ収束するために必要な反復改良回数および最適解の精度にはほとんど差がないが、New Dualの方が常に実行可能領域内において設計変数の改良を行っており、Dualに比べてより安定した方法であるといえる。

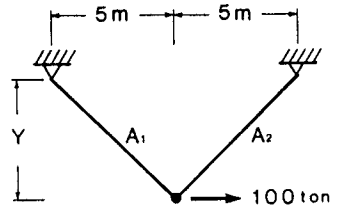


図-1 2部材トラス

(2) 21部材トラス

図-4に示す21部材トラスを、応力制限 $\sigma \leq 2400 \text{ kg/cm}^2$ 、および、たわみ制限 $\delta \leq 10.0 \text{ cm}$ 、 $\delta \leq 2.0 \text{ cm}$ のもとで最適設計を行った結果を表-1に示す。まず $\delta a = 10.0 \text{ cm}$ の設計問題では応力制限が支配的となり、 $YML=10\%$ とした。Dualで11回、New Dualで13回の反復改良で全く同一の最適解に収束している。なお Y_1 に多少の差異が認められるが、この問題では A_3 、 A_4 、 A_7 いずれも最小断面積（ 0.1 cm^2 ）となっており、 Y_1 の値は実質的には意味を有しない。次に $\delta a = 2.0 \text{ cm}$ の設計問題では、たわみ制限が支配的となり、 $YML=2\%$ とした。いずれの方法においても反復改良回数（ITE.）が5回以上で解が振動し、二つの振動解について Y を固定して部材断面積のみの最適化を行った結果、表-1に示すように同一の最適解（OPT.）を得ている。ただし各ITE.における各制約条件の満足度はNew Dualによる改良解の方がすぐれている。これらの結果からも、両方法により得られる最適解の精度にはほとんど差がなく、いずれの方法を用いても同一の最適解が得られることが明らかである。ただしNew Dualの近似設計空間がより控えめな近似であることから、問題によってはNew Dualの方が最適解を決定するために必要とする反復改良回数が多少（2～3回）多くなる例もみられる。

以上の考察より、New Dualの方がDualよりも、より汎用的かつ安定した方法であると結論づけることができる。

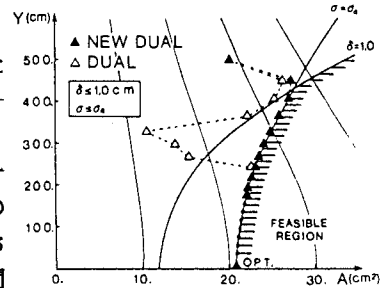


図-2 2部材トラスの収束過程
（応力制限が支配的な場合）

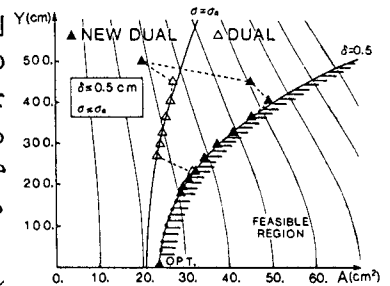


図-3 2部材トラスの収束過程
（たわみ制限が支配的な場合）

表-1 21部材トラスの両方法による最適解の比較

	INITIAL	$\delta a = 10.0 \text{ cm}$		$\delta a = 2.0 \text{ cm}$							
		DUAL	NEW DUAL	DUAL	DUAL (Y固定)	NEW DUAL	NEW DUAL (Y固定)	DUAL	DUAL (Y固定)	NEW DUAL	NEW DUAL (Y固定)
Y1	500.0	284.40	256.67	451.96	442.92	451.96	442.92	451.96	442.92	451.96	442.92
Y2	500.0	473.35	473.78	470.41	461.00	470.41	461.00	470.41	461.00	470.41	461.00
Y3	500.0	558.07	557.68	509.59	519.78	509.59	519.78	509.59	519.78	509.59	519.78
A1	100.0	26.35	26.31	30.65	29.31	31.01	31.43	30.65	29.31	31.01	31.46
A3	100.0	0.1	0.1	1.99	1.17	0.10	0.10	1.99	1.17	0.10	0.10
A11	100.0	25.36	25.11	25.65	19.76	15.03	22.01	25.65	19.76	15.03	21.96
ITE.		11	13	5	6			5	6		
T.OST	48780280	8613045	8611850	10426650	9960294	10158140	10050340	10426650	9960294	10157890	10049470

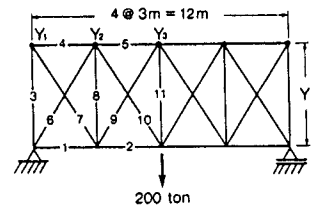


図-4 21部材トラス

参考文献〔1〕たとえば、大久保、中島：トラス構造物の総合的な最適化に関する考察、土木学会第42回年次学術講演会講演概要集、第I部、pp.558-559、1987年9月。〔2〕C.Fleury and V.Braibant: Structural Optimization - A New Dual Methods Using Mixed Variables, Int.J.Num.Meth.Engng, Vol.23,1986。