

1.はじめに 構造物の安全性・信頼性の評価においては、2次モーメント法系の手法が用いられることが多い。しかし、確率変数が非常に多い場合、複数の破壊モードが存在する場合、および非線形問題などに対しては、それらの手法の適用性は充分には確立していない。このような場合の代替として、相関性を持った多数の確率変数(確率ベクトル)を含む系の信頼性解析におけるモンテカルロ法の適用性について、特に精度面から検討したのでその概略を述べる。

2.モンテカルロ・シミュレーション(MCS)法 構造系が確率ベクトル $\mathbf{X}=[X_1 X_2 \cdots X_N]^T$ を含む場合、この方法では、まず共分散行列 $\mathbf{C}_{XX}$ が満たされるようにサンプル関数 $\mathbf{X}^{(j)}(j=1, \dots, N_s)$ を生成する^[1]。次に、このサンプル関数を含む系の構造解析(例えばFEM)及び限界状態の条件 $g(\mathbf{X}) \leq 0$ との比較を試行回数 $N_s=N_g$ 回行う。この $g(\mathbf{X})$ は、各要素や全体系にそれぞれ定められ、対応する限界状態の生起確率 P_f は次式で推定される。

$$P_f^{MC} = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \delta(\mathbf{X}^{(j)}) \quad ; \quad \delta(\mathbf{X}^{(j)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(\mathbf{X}^{(j)}) \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

このMCS法で推定された P_f の精度は、その分母で評価でき、未知の精解を $\bar{P}_f$ とすると

$$\text{Var}[P_f^{MC}] = \frac{1}{N_s^2} \text{Var} \left[\sum_{j=1}^{N_s} \delta(\mathbf{X}^{(j)}) \right] = \frac{\bar{P}_f - \bar{P}_f^2}{N_s} \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2)式で注目されることは、MCS法の精度は $\bar{P}_f$ と N_s にのみ依存し確率変数の数 N に無関係なことで、これは N が大きい場合には非常に好都合である。なお試行回数は、(2)式より $N_g \approx 1/\bar{P}_f$ 程度以上必要となる。

3.モンテカルロ積分(MCI)法 P_f をその定義式より厳密に導くには、 $\mathbf{X}$ が多次元ガウス分布の場合

$$P_f = \int_{D_X} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{D_z} f_z(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad ; \quad f_z(\mathbf{t}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T \mathbf{t}\right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで $\mathbf{z}$ は $\mathbf{C}_{XX}$ のモード分解を利用して $\mathbf{X}$ の各成分を無相関、期待値0、分散1に変換したベクトルである。また D_X は $g(\mathbf{X}) \leq 0$ が満たされる N 次元空間での積分領域である。通常(3)式を解析的に解くのは不可能で、台形則などの単純な多重数値積分すら N が大きいと演算量が途方もなく大きくなる。従ってsample-meanモンテカルロ法^[2]を利用してこの多重積分を実行する。試行回数を同じく N_g とすると、MCI法による P_f の推定値は^[3]

$$P_f^I = \frac{A_N}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} f_z^*(\mathbf{t}^{(j)}) \quad ; \quad f_z^*(\mathbf{t}^{(j)}) = \begin{cases} f_z(\mathbf{t}^{(j)}) & \text{if } g(\mathbf{X}^{(j)}) \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで $A_N = d_1 d_2 \cdots d_N$ は積分領域の超面積で、 d_i は $\pm d_i/2$ の外側の $f_z(\mathbf{t})$ の確率密度が充分小さくなるように定める。さらに多重積分の次数を下げるために、 $\mathbf{C}_{XX}$ の固有値の性質を考慮し $\mathbf{z}$ を M 次($M \leq N$)までで打ち切る。このMCI法による P_f の推定値の分散を同様に求めると

$$\text{Var}[P_f^I] = \frac{A_M^2}{N_s} \text{Var}[f_z^*(\mathbf{t})] \approx \frac{1}{N_s} \left\{ A_M \int_{\Omega_M} (f_z^*(\mathbf{t}))^2 d\mathbf{t} - \bar{P}_f^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

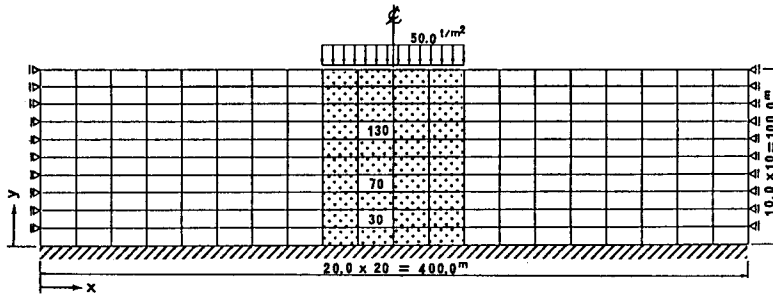
(5)式は(2)式と似た形をしているが、 A_M が N の増加と共に指数的に増大し、分散が増大(精度が悪化)する。

3.例題 図-1に示す地盤の支持力問題を取り上げ、200個の有限要素の内部まさつ角が図-2の空間的自己相関関数を持つ確率場であると仮定した。図-3に示すせん断破壊規準に対する要素および系の P_f の例を図-4に示すが、有効な確率変数の数が多い(確率場の相関距離が大きい)程、MCI法の精度は低下している。一方、MCS法はこれに無関係に、 P_f と N_g に応じた精度を示しており、確率変数を多く含む問題への有用性が確認された。

[1] 山崎・篠塚, 「共分散行列を確実に満たす確率ベクトルのシミュレーション法」第42回土木学会年次講演会, 1987.

[2] Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, 1981.

[3] Shinozuka, "Basic Analysis of Structural Safety," Jour. of ST, ASCE, Vol. 109, No.3, 1983.



システムの限界状態はトーン
部要素の限界状態の和事象

図-1 有限要素モデル

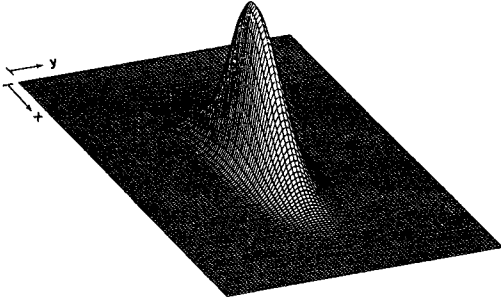


図-2 確率場の自己相関関数

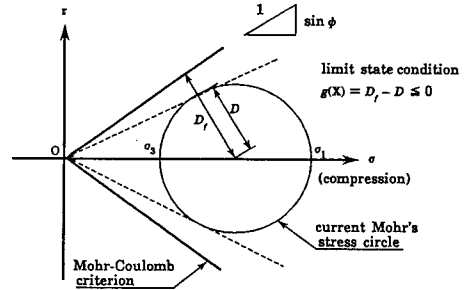
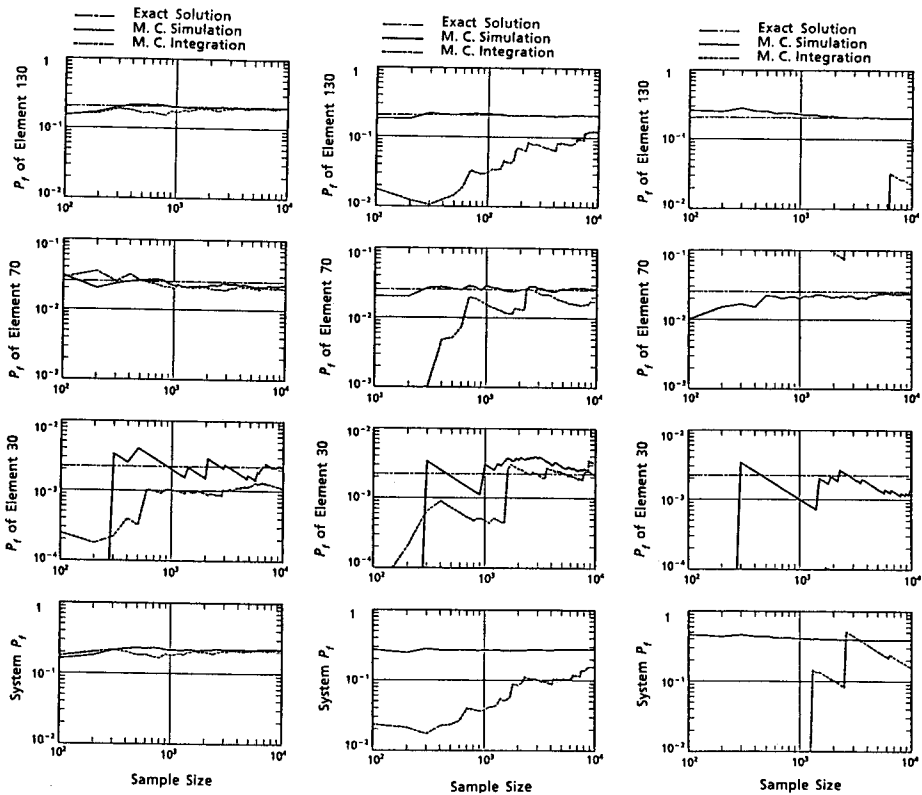


図-3 Mohr-Coulombの破壊規準



(a) $d_x = 320\text{m}$, $d_y = 80\text{m}$

(b) $d_x = 160\text{m}$, $d_y = 40\text{m}$

(c) $d_x = 80\text{m}$, $d_y = 20\text{m}$

図-4 試行回数に対する要素およびシステムの限界状態生起確率 (d_x, d_y = 相関距離)