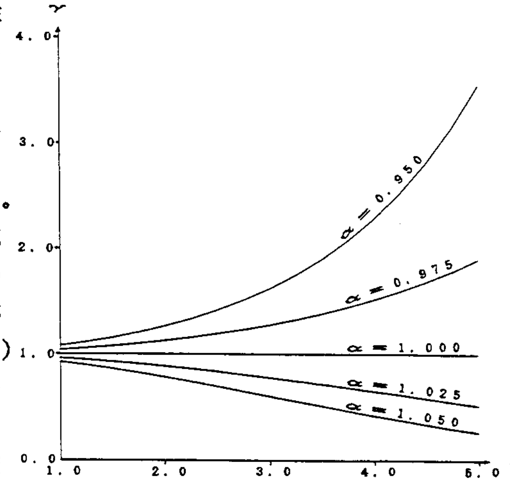
I-263　全確率分布安全性指標の有効性について

信州大学工学部　正員　長　尚

1．まえがき

一般に簡単な計算で求められる全確率分布安全性指標β（信頼性指標ともいう）は破壊確率p_Fとの対応の良い指標である。[1)2)] これまで筆者が扱った多くの構造物の信頼性解析の検討結果によると，モンテカルロ法によって求めたほぼ正確な破壊確率p_Fに対応する指標β^E，すなわち　$\beta^E=-\Phi^{-1}(p_F)$ ・・・（1）に対する安全性指標βの誤差（$\beta-\beta^E$）率は通常数%以下である。[2)] ここに，$\Phi(\cdot)$は標準正規分布の累積分布関数である。しかし安全性指標βが大きくなると，安全性指標βの誤差率が数%以下であっても，これに対応する破壊確率p_Fの誤差は非常に大きくなる。その模様を見るために，βの変化αに対するp_Fの変化γを次式で定義し，その結果を図－1に示す。　$\gamma=\Phi(-\alpha\beta)/\Phi(-\beta)$ ・・・（2）

図－1は横軸にβをとり縦軸にγをとって，安全性指標βが±2.5 %，±5%変動した場合（すなわちα＝0.95,0.975,1.025,1.05 ）について示されている。この図から分かるように安全性指標βの誤差がたとえ5%であっても，$\beta=5$の場合破壊確率p_Fは非常に大きく変化し，約1/4 もしくは3.5 倍にもなっている。したがって全確率分布安全性指標βが破壊確率と対応が良いと言っても，$p_F\fallingdotseq\Phi(-\beta)$ ・・・（3）の関係が成立するのではなく，むしろ次のような関係が成立すると言った方が適切である。$\beta\fallingdotseq-\Phi^{-1}(p_F)$ ・・・（4）　そうだとすると，たとえ全確率分布安全性指標であっても，βの値が大きくなると，指標としての有効性に疑問が出るかもしれない。確かに，破壊確率そのものが議論の対象になり，またその確率の変化が敏感に結果に響くような問題では，このような安全性指標を用いることは疑問であろう。しかし構造物の信頼性解析の問題では，むしろそのようなケースは少ない。通常は構造物の設計に関連して安全性指標は用いられる。構造物の設計問題では破壊確率の変化がそのまま同じ程度に，断面寸法などの設計結果に影響を与えるのではない。普通安全性指標の変化と同程度もしくはその倍程度の影響しか与えないのである。本文ではこの問題について具体的な数値計算結果に基づいて検討する。そして構造物の設計問題では，破壊確率に比べてはるかに計算が簡単で，設計結果との関連も強い全確率分布安全性指標βの有効性は極めて高いことを指摘し，若干の考察を加える。



図－1安全性指標の変化と破壊確率の変化の関係

2．安全性指標の変化が設計に与える影響

2．1　ケース1　破壊基準関数$g(\mathbf{x})$が，$g(\mathbf{x})=R-S$ ・・・（5）で，強度Rと荷重影響Sが共に正規分布の場合，設計用安全性指標β_Dを用いて設計されたときの中央安全率（$\bar{\nu}=R/S$）は次のように表される。　$\bar{\nu}=\{1+\sqrt{1-(1-\beta_D{}^2V_R{}^2)(1-\beta_D{}^2V_S{}^2)}\}/(1-\beta_D{}^2V_R{}^2)$ ・・・（6）　ここにV_R，V_SはR，Sの変動係数である。ここでβ_Dの変化α（0.95～1.05）に対する$\bar{\nu}$の変化模様を見るために，β_Dの変化αに対する$\bar{\nu}$の変化δを次式のように定義する。　$\delta=\bar{\nu}(\alpha\beta_D)/\bar{\nu}(\beta_D)$ ・・・（7）　このδの計算結果から言えることについては後述する。

2．2　ケース2　破壊基準関数が式（5）で確率変数R，Sが共に対数正規分布の場合，設計中央安全率$\bar{\nu}$は次のようになる。　$\bar{\nu}=\exp[\beta_D\sqrt{\ln\{(1+V_R{}^2)(1+V_S{}^2)\}}-\ln\sqrt{(1+V_S{}^2)/(1+V_R{}^2)}]$

・・・（8） 先のケース1の場合と同様に，β_D の変化に対する $\bar{\nu}$ の変化模様を δ によって見る。

2．3 ケース3～9 破壊基準関数はやはり式（5）とし，各種の確率分布の組合わせについて，$\beta_D=3$（$V_R=0.25$, $V_S=0.3$）における設計中央安全率 $\bar{\nu}$ および安全性指標の変化の $\bar{\nu}$ への影響 δ の計算結果を表－3に示す。表中のアルファベット記号は，最初がRの，次がSの確率分布が次のようであることを示す。N：正規分布，L：対数対数分布，W：ワイブル分布［下限値＝平均値－2 ＊（標準偏差）］，E：極値Ⅰ型最大値分布，B：ベータ分布［下限値＝平均値－2＊（標準偏差），上限値＝平均値＋3＊（標準偏差）］

表－1 ケース1～9の $\bar{\nu}$，δ

ケース番号			1	2	3	4	5	6	7	8	9
	β_D	α	NN	LL	NL	LN	NE	LE	WE	NB	BB
$\bar{\nu}$	2.85	0.95	3.92	2.94	3.84	2.73	3.84	3.00	2.80	4.00	2.81
	3.00	1.00	4.47	3.12	4.38	2.87	4.34	3.19	3.05	4.56	2.90
	3.15	1.05	5.21	3.30	5.06	3.01	5.06	3.39	3.28	5.31	2.98
δ	2.85	0.95	0.88	0.94	0.88	0.95	0.88	0.94	0.92	0.88	0.97
	3.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3.15	1.05	1.16	1.06	1.16	1.05	1.17	1.06	1.08	1.16	1.03

2．4 ケース10～11 次のような鋼製はりの曲げ破壊の破壊基準関数[1] について取り上げる。 $g(\mathbf{x})=x_1 x_2 x_3-(x_4+x_5)x_6$ ・・・（9）ここで x_1 の平均値 $\bar{x}_1$ を設計用安全性指標 $\beta_D=4$ で設計するものとする。平均値 $\bar{\mathbf{x}}$，変動係数 $\mathbf{V}$ は次のようなものとし，ケース10ではすべての確率変数を正規分布，ケース11ではすべての確率変数を対数正規分布とする。 $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1\ 2.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0)^T$ ・・・（10） $\mathbf{V}=(0.15\ 0.15\ 0.15\ 0.15\ 0.15\ 0.15)^T$ ・・・（11）表－2に $\alpha=0.95$～1.05 とした場合の設計値 $\bar{x}_1$ と安全性指標の変化の設計値への影響 δ および破壊確率への影響 γ を示す。

表－2 ケース10，11の $\bar{x}_1$，δ，γ

ケース番号	β_D	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
	α	0.950	0.975	1.000	1.025	1.05
	γ	2.28	1.52	1.0	0.65	0.42
10	$\bar{x}_1$	3.81	3.97	4.13	4.31	4.50
	δ	0.92	0.96	1.0	1.05	1.09
11	$\bar{x}_1$	3.37	3.47	3.59	3.70	3.82
	δ	0.94	0.97	1.0	1.03	1.07

3．考察

まずケース1の場合には紙幅の都合で δ の計算結果は省略するが，β_D の値が $1/V_R$ に近い場合を除き安全性指標のもつ誤差はそれがもたらす破壊確率の変化のような極端な影響を設計値には与えない。β_D の値が $1/V_R$ に近い場合には破壊確率の変化のような影響を越えて，さらに極端な影響を与える。これは既に指摘[1] したように，このようなケースでは強度を幾ら上げてもある一定の安全性を越えないという，常識に反する性質を持っていることによる。次にケース2の場合には安全性指標のもつ誤差の設計への影響は，ケース1の場合よりさらに小さい。通常は誤差と同程度か，高々その倍程度の影響しかない。しかもこの場合にはケース1のような欠点，すなわち幾ら強度を高めても安全性の水準がある一定値より上がらず，わずかな設計用安全性指標の誤差が設計に非常に響くというようなことはない。またこれらケース1，2と同じことが表－1，2に見られるようにケース3～11でも言える。なおケース10のような実際的な多変数の非線形破壊基準関数の場合には，個々の確率変数をすべて正規分布としてもケース1のような現象は起きていない。このケース10では強度項 $x_1\ x_2\ x_3$ をRとし，荷重影響項 $(x_4+x_5)x_6$ をSとして，これらの変動係数 V_R，V_S をモンテカルロ法で求めると0.26，0.18であった。そこでこれらのR，Sを正規分布とすると，$\beta_D=4.0$（$>1/V_R=3.85$）では設計不可能となる。また設計可能な $\beta_D=3.5$ としても，$\alpha=1.05$ のとき $\delta=2.0$ となり，安全性指標の変化の影響は極めて大きくなる。しかしケース10では，その影響は表－2の通り非常に小さい。したがって強度項を一つの確率変数とした時，それを正規分布とするのは不合理で実際的でない。結論として構造物の設計問題では破壊確率の変化は安全性指標の変化程度もしくは高々その倍程度にしか設計に影響しないので，破壊確率より設計との関連が直接的で強い全確率分布安全性指標の有効性は高い。

参考文献 1)長尚：安全性指標に関する若干の考察，土木学会論文報告集，第 324号，1982. 2)長尚：構造物の信頼性解析に用いる信頼性指標について，JCOSSAR'87論文集，Vol.1，1987.