I-261　耐力分布の推定法に関する研究

東北大学大学院　学生員　○小出　英夫
東北大学工学部　正　員　　尾坂　芳夫

1．まえがき

終局限界状態に対する安全性の照査には，構造物の耐力推定を行うことが必要条件とされる．しかし，同じ設計値で造られた構造物の耐力はばらつくことが知られており，設計者が耐力を知ることは不可能である．そこで，設計者は，耐力をこのばらつきをよく表した確率分布を持つ確率変数として取り扱わざるをえない．しかし，耐力の確率分布を直接推定することは，同一の設計値に対して造られた数多くの構造物の破壊試験を行わなければならず，容易でないと考えられる．そこで本研究では，まず，耐力を新たな確率変数を用いてモデル化し，次に，ここで新たに導入した確率変数の確率分布を，様々な設計値で造られた構造物の破壊試験結果を用いて決定することによって，耐力の確率分布を推定する方法を提案する．ここで，耐力とは特定の載荷状態に対する終局耐力を意味するものとする．また，以下の議論は同一の構造形式を持った構造物ごとに取り扱うものとする．

2．耐力のモデル化

n　　：設計変量の種類の総数

$g(\cdot)$：一般的に用いられている耐力算定のための関数式

R　　：耐力を表す確率変数

$\mathbf{X}=\{X_1,\ X_2,\ \cdot\cdot,\ X_n\}$　：$X_i,(i=1,n)$は確率変数で，$\mathbf{X}$はその確率変数の集合．各要素は，互いに独立である．X_iは，助変数iで特定される設計変量に対する確率変数とする．

$f_{X_i},(i=1,n)$　：f_{X_i}は，確率変数X_iの確率密度関数．

$\mathbf{x}=\{x_1,\ x_2,\ \cdot\cdot,\ x_n\}$　：$x_i,(i=1,n)$は，$X_i,(i=1,n)$の実現値．

$\mathbf{x}_d=\{x_{d1},\ x_{d2},\ \cdot\cdot,\ x_{dn}\}$：$x_{di},(i=1,n)$は，$X_i,(i=1,n)$の確率分布によって特定される設計値．

Φ，ϕ　：耐力のモデル化に用いた確率変数とその実現値．

ここで，Φを用いてRを次式のようにモデル化する．

$$R=\Phi\cdot g(\mathbf{x}_d) \tag{1}$$

Φは，$\mathbf{X}$の各要素と相関があると仮定し，Φの確率密度関数を次式で示す．

$$f_{\Phi}(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f_{\Phi,\mathbf{X}}(\phi,\ \mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f_{\Phi|\mathbf{X}}(\phi|\mathbf{x})\cdot f_{X_1}(x_1)\cdot\cdot f_{X_n}(x_n)\,d\mathbf{x} \tag{2}$$

3．耐力分布の推定法

安全性照査において，Rの確率分布を求めるには，式（2）で示された$f_{\Phi|\mathbf{X}}(\phi|\mathbf{x})$を知る必要がある．そこで，以下のフローに従って，まず過去の実験データを用いて$f_{\Phi|\mathbf{X}}(\phi|\mathbf{x})$を導きだし，その結果を用いて耐力分布を推定する．

① 過去の各種構造物の実験結果より，耐力（R'）・各構造物における各設計変量のばらつきに関する情報・設計値（$\mathbf{Y}=\{Y_1,\ Y_2,\ \cdot\cdot,\ Y_n\}$）のデータを集める．

② 各実験ごと次式よりΦ'を算出する．

$$R'=\Phi'\cdot g(\mathbf{Y}) \tag{3}$$

③ 先のデータより求める各種統計量を用いて，以下の確率変数の確率分布を推定する．ここで，各確率変数は，正規分布をしているとする．

$\mathbf{Y}=\{Y_1,\ Y_2,\ \cdot\cdot,\ Y_n\}$　：$Y_i,(i=1,n)$は確率変数で，$\mathbf{Y}$はその確率変数の集合．各要素は，互いに相関があり，Φ'とも相関がある．Y_iは，助変数iで特定される設計変量における，様々な構造物の設計値を表す．

$\mathbf{y}=\{y_1,\ y_2,\ \cdot\cdot,\ y_n\}$　：y_i, (i=1, n)は，Y_i, (i=1, n)の実現値．

Φ'，ϕ'　：②によって求められる変量を表す確率変数とその実現値．

$\mathbf{X_y}=\{X_{y1},\ X_{y2},\ \cdot\cdot,\ X_{yn}\}$　：X_{yi}, (i=1, n)は確率変数で，$\mathbf{X_y}$はその確率変数の集合．各要素は，互いに独立である．X_{yi}は，助変数 i で特定される設計変量に関係する確率変数で，その分布は，設計値がy_iとなる各実験における設計変量の各分布に重み付けをすることによって新たに定めるものとする．

$\mathbf{x_y}=\{x_{y1},\ x_{y2},\ \cdot\cdot,\ x_{yn}\}$　：x_{yi}, (i=1, n)は，X_{yi}, (i=1, n)の実現値．

④　Φ', Yはそれぞれの平均，分散，相関係数をパラメータとする（n＋1）次正規分布であるとし，Φ'，Yの結合確率密度関数を求める．

⑤　④より，Y＝$\mathbf{y}$の条件付きのΦ'（正規分布）の確率密度関数を求める．密度関数を以下に示す．

$$f_{\Phi'|Y}(\phi'\ |\mathbf{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y})}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi'-\mu_{(\Phi'|\mathbf{y})}}{\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y})}}\right)^2\right\} \tag{4}$$

$\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y})}{}^2=\sigma_{\Phi'}{}^2-{}^t\mathbb{P}\Sigma_{\cdot}$ ，　$\mu_{(\Phi'|\mathbf{y})}=\mu_{\Phi'}+{}^t\mathbb{P}\mathbf{Z}$ ，　Σは，Yの分散共分散行列

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} y_1-\mu_{Y1} \\ \vdots \\ y_n-\mu_{Yn}\end{bmatrix},\qquad \Sigma_{\cdot}=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}(Y_1,\Phi') \\ \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_n,\Phi')\end{bmatrix},\qquad \mathbb{P}=\Sigma^{-1}\Sigma_{\cdot}$$

⑥　$\Phi'|(Y=\mathbf{y})$と$\mathbf{X_y}$は，それぞれの平均，分散，相関係数をパラメータとする（n＋1）次正規分布であるとし，その結合確率密度関数を求める．

⑦　⑥より，$\mathbf{X_y}=\mathbf{x_y}$の条件付きの$\Phi'|(Y=\mathbf{y})$（正規分布）の確率密度関数を求める．密度関数を以下に示す．

$$f_{\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y}}(\phi'\ |\mathbf{y},\ \mathbf{x_y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi'-\mu_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}}{\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}}\right)^2\right\} \tag{5}$$

$\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}{}^2=\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y})}{}^2-{}^t\mathbb{Q}\Sigma_{\cdot\cdot}$ ，　$\mu_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}=\mu_{(\Phi'|\mathbf{y})}+{}^t\mathbb{Q}\mathbb{W}$

Σ'は，$\mathbf{X_y}$の分散共分散行列（ただし，各要素は互いに独立なので対角行列となる．）．

$$\mathbb{W}=\begin{bmatrix} x_{y1}-\mu_{Xy1} \\ \vdots \\ x_{yn}-\mu_{Xyn}\end{bmatrix},\qquad \Sigma_{\cdot\cdot}=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}(X_{y1},\ \Phi'|(Y=\mathbf{y})) \\ \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_{yn},\ \Phi'|(Y=\mathbf{y}))\end{bmatrix},\qquad \mathbb{Q}=\Sigma'^{-1}\Sigma_{\cdot\cdot}$$

ここで，$\mu_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}$を以下のように書き換える．

$$\mu_{(\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y})}=\mu_{(\Phi'|\mathbf{y})}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{(\Phi'|\mathbf{y})}}{\sigma_{Xyi}}\cdot\rho_{(\Phi'|\mathbf{y}),Xyi}\cdot(x_{yi}-\mu_{Xyi}) \tag{6}$$

ただし，$\Phi'|(Y=\mathbf{y})$とX_{yi}, (i=1, n)の相関係数$\rho_{(\Phi'|\mathbf{y}),Xyi}$，(i=1, n)は，未知量である．

⑧　Yの任意の２つの実現値$\mathbf{y}=\mathbf{y}^{(1)}$，$\mathbf{y}^{(2)}$において，すべての$\mathbf{x_y}^{(1)}=\mathbf{x_y}^{(2)}$となるもとで以下の関係が成立するものとし，この関係を用いて任意の$\mathbf{y}$に対する$\rho_{(\Phi'|\mathbf{y}),Xyi}$，(i=1, n)を求める．

$$\mu_{(\Phi'|\mathbf{y}^{(1)},\mathbf{x_y}^{(1)})}=\mu_{(\Phi'|\mathbf{y}^{(2)},\mathbf{x_y}^{(2)})}\cdot g(\mathbf{y}^{(2)})/g(\mathbf{y}^{(1)}) \tag{7}$$

これより，$\Sigma_{\cdot\cdot}$を知ることもでき，式（５）は既知となる．

⑨　$\mathbf{y}=\mathbf{x}_d$の場合に着目し，任意の$\mathbf{x_y}$，ϕ'に対して$\mathbf{x_y}=\mathbf{x}$，$\phi'=\phi$となる$\mathbf{x}$，ϕを用いて次式が成立するものとする．

$$f_{\Phi'|\mathbf{y},\mathbf{x_y}}(\phi'\ |\mathbf{y},\ \mathbf{x_y})=f_{\Phi|\mathbf{x}}(\phi|\mathbf{x}) \tag{8}$$

これより，式（２）の$f_{\Phi|\mathbf{x}}(\phi|\mathbf{x})$を推定できる．

⑩　式（１），式（２）より，耐力Rの確率分布を求める．

4．まとめ

過去の実験結果を用いて，Yの各確率量の平均・分散・相互の相関係数・Φ'との相関係数，$\mathbf{X_y}$の各確率量の平均・分散を得ることにより，本手法を用いて耐力分布の推定を行うことができる．