

I-62

切欠きの力学（平面弾性問題）

名高速道路公社 正員 飯田字朗
名古屋工業大学 正員 長谷部宜男
名古屋工業大学 正員 中村卓次

まえがき

応力集中やクラックに関する解析は過去に数多くされている（例えば1,2,3）。中でも応力集中に関する系統的な研究として〔1〕による切欠きの角度、切欠きの深さ、切欠き底に丸みを有する形状の光弾性実験による応力集中の研究。同じく〔4〕による研究。〔5〕による複雑な形状の孔又は切欠きの応力集中を等価な円に置き換えてより簡単に求める研究。浅い切欠きと深い切欠きから応力集中を近似するノイバーの三角則などが見当たる〔6〕。しかし、応力集中に関する研究は大半が個々の形状、荷重条件に対する解析を主としたものであり、応力集中一般に成り立つ法則のようなものは

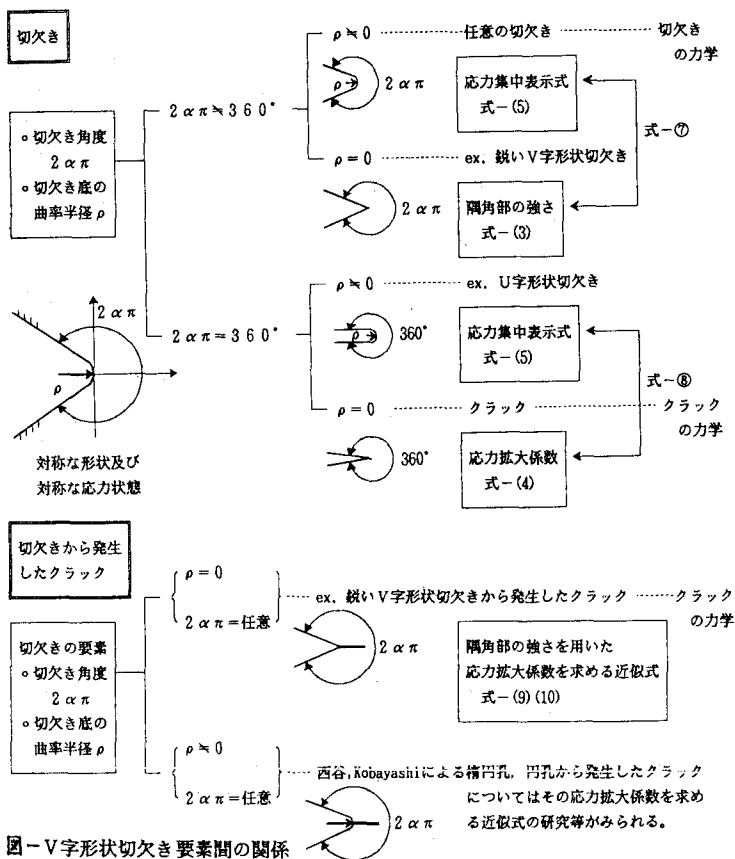


図-V形状切欠き要素間の関係

あまりおおく見い出されていないようである。ここでは、自由境界の平面弾性問題における切欠き底に丸みを有するV形状の切欠きと、丸みの無い鋭い切欠きとについて、切欠きの角度と切欠き底の丸みの曲率半径とを要素とし、隅角部の強さと応力集中との関係、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数との関連性等を著者らの研究をもとに系統的にまとめたものである。

切欠きの要素間の関係

ここでは、図に示すように切欠き底に丸みを有するV形状切欠きで角度の2等分線に対称な形状及び応力状態の場合を考える。この時、応力集中の原因は切欠きの角度 $2\alpha\pi$ と切欠き底の丸みの曲率半径 ρ が主たるものであろう。切欠きの要素の組み合わせ、対応する形状、及びその代表的なパラメーター等を図に示す。まず、角度=任意、曲率半径 $\rho=0$ の場合を考える。この時、対称な応力状態の各応力成分は以下のように表わされる〔7〕。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{j=1}^{\infty} -(m_j+1)r^{m_j} \{B(m_j-2)\cos m_j\theta + D(m_j+2)\cos(m_j+2)\theta\} \\ \sigma_\theta &= \sum_{j=1}^{\infty} (m_j+1)(m_j+2)r^{m_j} \{B\cos m_j\theta + D\cos(m_j+2)\theta\} \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{j=1}^{\infty} (m_j+1)r^{m_j} \{Bm_j\sin m_j\theta + D(m_j+2)\sin(m_j+2)\theta\} \end{aligned} \quad \text{--- (1)}$$

ここで r , θ は切欠き先端からとった極座標であり、係数 B , D は境界条件によって決まる。さらに角度の2等分線に対称な応力状態の場合の m_j ($j=1,2,3,\dots$) は次式の方程式の根である。

$$(m+1)\sin 2d\pi + \sin[2(m+1)d\pi] = 0 \quad \text{--- (2)}$$

式(2)から分かるように m_j は角度 $2\alpha\pi$ のみに依存する。式(1)のうち後述との関連から $\theta = 0$ (対称軸上)の σ_θ を考え、係数をまとめて以下のように表す。

$$\sigma_\theta(r) = f_0 r^{m_1} + f_{02} r^{m_2} + f_{03} r^{m_3} + \dots \quad \text{--- (3)}$$

式(3)で θ 一項が主に応力集中の要因となり、この係数 f_0 が切欠きの強さのパラメーターになる(8)。特に角度 $2\alpha\pi = 360^\circ$ の場合、形状はクラックとなり式(3)は以下のように表される。

$$\sigma_\theta(r) = K_I / \sqrt{2\pi r} + f_2 + f_3 \sqrt{r} + \dots \quad \text{--- (4)}$$

式(4)の θ 一項の係数がモード I に対する応力拡大係数である。ここで式(3)の係数 f_0 を「隅角部の強さ」と定義する。これはクラックの応力拡大係数に相当し、任意の角度の切欠きに拡張した考え方である。尚、係数 f_0 の求め方は(8)に詳しい。任意の境界条件で f_0 が決まると式(1)の係数に等しいとおいて係数B, Dが求められ、式(1)より切欠き底付近(r が小さい範囲)の任意の位置の応力成分が計算できる。

次に角度=任意、曲率半径=任意の場合を考える。形状が角度の2等分線に対称のとき、任意の荷重に対して角度の2等分線上の応力は切欠き底の丸みの曲率半径 ρ を用いて以下のように表される(9)。対称な応力状態のとき2等分線上の応力は最大応力となるのでこの応力を $\sigma_{\theta \max}$ とする。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta \max} &= \sum_{j=1}^{\infty} h_j \rho^{m_j} \\ &= h_0 \rho^{m_1} + h_{02} \rho^{m_2} + h_{03} \rho^{m_3} + \dots \end{aligned} \quad \text{--- (5)}$$

ここで係数 $h_0, h_{02}, h_{03} \dots$ は境界条件によって決まり、 m_j ($j=1, 2, 3 \dots$)は式(2)の根である。式(5)で θ 一項が主に応力集中の要因となり、この係数 h_0 が切欠きの応力集中のパラメーターになる。式(3), (5)の係数 f_0, h_0 は以下の式で関係づけられる。この関係は切欠きの角度に依存し、荷重条件にはよらない(8)。

$$f_0 / h_0 = C_\theta \quad \text{--- (6)}$$

式(6)より切欠き角度が同じなら、どちらか一方の係数が既知のとき他方が分かる。応力集中値が曲率半径 ρ で表されている時、モード I のクラックの応力拡大係数と最大応力 $\sigma_{\theta \max}$ とは以下のような式がある。

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{\pi r} \cdot \sigma_{\theta \max} \cdot \frac{1}{2}) \quad \text{--- (7)}$$

同様に任意の角度の切欠きにおいても式(6)の関係より以下のように表される(8)。

$$f_0 = \lim_{r \rightarrow 0} (r^{-m_1} \cdot \sigma_{\theta \max} \cdot C_\theta) \quad \text{--- (8)}$$

さらに切欠き発生したクラックについて考える。切欠き角度2等分線に沿って発生した長さ b のクラックの応力拡大係数はクラック発生前の b の位置の応力値 $\sigma_\theta(b)$ を用いて以下のように表される(10)。

$$K_I(b) = A \sigma_\theta(b) \sqrt{\pi b} \quad \text{--- (9)}$$

ここで係数 A は切欠きの角度、クラック長によって決まり荷重条件には依存しない(11)。 $\sigma_\theta(b)$ として式(4)が用いられ得る。さらに $\sigma_\theta(b)$ が式(3)の θ 一項のみで近似できる場合は以下ようになる。

$$K_I(b) = A f_0 b^{m_1} \sqrt{\pi b} \quad \text{--- (10)}$$

つまり、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数が隅角部の強さで f_0 で表され得る。そこで切欠き角度が異なる2つの切欠きE, FがG, Hという2つの異なる荷重をそれぞれ受ける場合2つの切欠きE, Fのどちらが危険かという問題を考える。これは式(10)により求められる2つの切欠きE, Fから発生した短いクラックの応力拡大係数の値の大小によって判断される。又、式(10)によって切欠きの強さはクラックの強さに関係づけられるので、切欠きの力学はクラックの力学と結びつけられる。

参考文献

- (1) 西田正考(1981) "応力集中", (2) Sih G.C. (1973) "Handbook of Stress Intensity Factors", (3) Murakami Y. ed. (1986) "Stress Intensity Factors Handbook", (4) Heywood R.B. (1952) "Designing by Photoelasticity", (5) 平野富士夫(1951) "機論17巻61号", (6) Neuber (1937) "Kerbspannungslehre" Springer-Verlag, (7) Williams M.L. (1952) "Jour. of Appl. Mech. 19", (8) Hasebe N. & Iida J. (1983) "Jour. of Eng. Mech. 109", (9) 長谷部宜男(1971) "土論194号", (10) Hasebe N. & Iida J. (1978) "Eng. Frac. Mech. 10", (11) Iida J., Hasebe N. & Nakamura T. "Int. Jour. of Frac." 投稿中