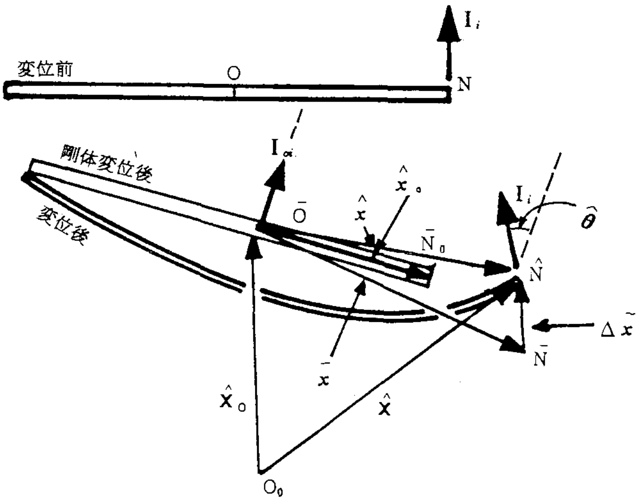
I-52　立体構造物の有限変位解析における有限回転角の取り扱い

豊田高専　正員　桜井　孝昌
東京大学　正員　西野　文雄

1．　まえがき　有限回転角はベクトル則に従わないため，立体構造物の有限変位問題で生じる有限回転角をベクトル扱いすると，解析上で誤差を生じる．

本報告では，立体構造物の幾何学的非線形解析において，有限回転角を変位ベクトルと同程度の精度で取り扱う手法［1］について述べる．

2．　解析方法　外力と変位の関係を増分量ではなく全体量で定式化した．解析は有限要素法の手法を用い，離散化系で行った．微小歪みの仮定を採用し，剛体変位除去の手法を用いた．



図－1　棒要素の位置ベクトルと方向ベクトル

有限変位問題に関する基本的な考え方は板も棒も同じであるので，記述を簡単にするため，棒の場合について本報告の解析手法の概念を説明する．図－1に有限変位する真直な棒要素の変形状態を示す．変位前の節点Nが変位後$\hat{N}$に変位するとし，点$\hat{N}$の位置ベクトルおよび材軸の法線方向単位ベクトルをそれぞれ　$\hat{X}$　及び　$\hat{I}_i$　とする．変位後の要素に近接して剛体変位後の要素を設定し，点Nに対応する点を$\bar{N}_0$とする．剛体変位後の要素内の点$\bar{O}$を原点とし，点$\hat{N}$及び$\bar{N}_0$の位置ベクトルをそれぞれ$\hat{x}$および$\bar{x}_0$とする．さらに，点$\bar{O}$の法線ベクトル$\hat{I}_{0i}$から$\hat{N}$における法線ベクトル$\hat{I}_i$までに回転する微小回転ベクトルを$\hat{\theta}$と表す．位置ベクトル及び回転ベクトルを総称して$\hat{\delta}$と表し，

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} \equiv < \hat{x} - \hat{x}_0 \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} > \tag{1}$$

と定義する．節点力をFと表すと，固定された全体座標系に関する要素剛性方程式で表される梁－柱の式

$$F = K\hat{\boldsymbol{\delta}} \tag{2}$$

が求まる．式（2）は剛体変位後を基準として，線形化有限変位理論により定式化された式で，この式のKは微小変位理論による弾性剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスの和によって表される．

連続体を離散化して解析する場合，一般に一つの節点は複数の離散化された節点によって共有される．式（2）は一要素に関する要素剛性方程式で，右辺の$\hat{\delta}$は一つの要素に対応する量であり，要素が異なれば同じ節点でも異なる値となる．要素剛性方程式（2）を用いて全体剛性方程式を定式化する場合，異な

る要素に対する同一の節点に関して，変位ベクトルあるいは位置ベクトルにの共通の値が必要である．

$\hat{\delta}$ は節点における共通の変位量には成り得ない．節点の変位後の位置ベクトル$\hat{X}$と，モーメントに対応する有限回転角を共通の量とすると，有限回転角がベクトルとして扱えないため，この処理が繁雑となる

本報告においては，有限回転角の使用を避けるため，次のような手法で解析した．点$\hat{N}$の近傍に点$\bar{N}$を選び，点$\bar{N}$から$\hat{N}$に至る位置ベクトル及び回転ベクトルを$\Delta\tilde{x}$ 及び$\Delta\tilde{\theta}$とすると，

$$\hat{\delta} = \bar{\delta} + \Delta\tilde{\delta} \tag{3}$$

ここに，

$$\bar{\delta} = <\bar{x} - \hat{x}_0 \quad \bar{\theta}>^T, \qquad \Delta\tilde{\delta} = <\Delta\tilde{x} \quad \Delta\tilde{\theta}>^T \tag{4}$$

式（３）を（２）に代入すると，

$$F = K\Delta\tilde{\delta} + K\bar{\delta} \tag{5}$$

式（５）における$\Delta\tilde{\delta}$を節点Nの共通の座標ベクトルとして，$K\bar{\delta}$ を各々の節点の等価節点力として，全体剛性方程式を定式化し，繰り返し演算によって，

$$\Delta\tilde{\delta} = 0 \tag{6}$$

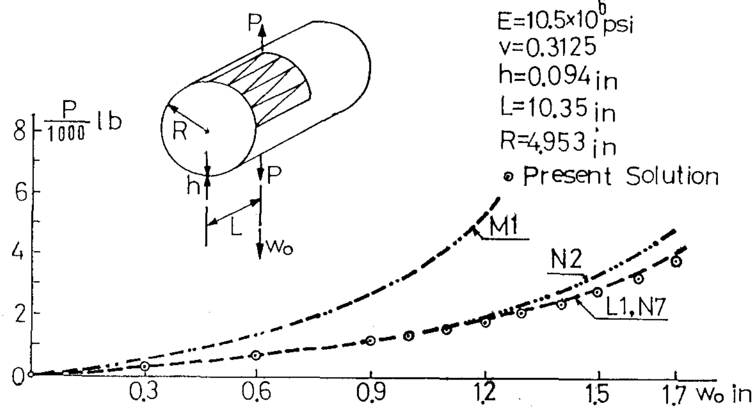
となる解を求めると，式（３）より，

$$\hat{\delta} = \bar{\delta} \tag{7}$$

となる．式（７）の$\bar{\delta}$が式（４）より$\bar{x}$, $\bar{\theta}$をあらわすことを考慮すると，節点$\hat{N}$の位置ベクトル$\hat{X}$と法線ベクトル$\hat{I}_i$は

$$\hat{X} = \hat{X}_0 + \bar{x}, \qquad \hat{I}_i = T(\bar{\theta})\hat{I}_{0i} \tag{8}$$

と求まる．ここに$\hat{X}_0$ は図－１に示す点$\bar{O}$の位置ベクトルであり，$T(\bar{\theta})$ はベクトル I_{0i} の回りに$\bar{\theta}$ だけ微小回転する回転角から求まる変換マトリックスである．



図－２　集中荷重を受ける円筒のつり合い曲線

３．　解析結果　図－２は図に示すような円筒に集中荷重が作用する場合の解析結果を示したものである．図中の曲線はつり合い曲線を示し，記号Ｍ１，Ｎ２，Ｌ１，Ｎ７は文献［２］のそれぞれ異なる理論によって計算された結果である．図中の　　印は本解析による結果である．Ｌ１，Ｎ７はＭ１，Ｎ２より高次の微小項を含んでいる理論による解である．これらの解と本報告の解とはよく一致している．

参考文献

1. Sakurai, T., Chu, K. and Nishino, F.: A Numerical Analysis of finite displacement Problems of Elastic Shell Structures, Proceedings of JSCE Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 3, No. 1, 1s-10s, April 1986.
2. Nolte, L. P.: On the Derivation and Efficient Computation of Large Rotation shell Models, Proceedings of the Euromech Colloquium 197, Jablonna, Poland, 1985, Finite Rotations in Structural Mechanics.