I-44　正３角形ドームの接線剛性行列の固有ベクトルの組成に関する考察

長岡技術科学大学　正会員○池田清宏
積水化学工業　　　　　　　和田祥作
長岡技術科学大学　正会員　鳥居邦夫

１。 まえがき

構造物の有限変位解析において、接線剛性行列の固有値解析により分岐点、並びに分岐モード等を知ることができる。本報告は分岐現象に伴って起こるこの固有ベクトルの対称性の低下の仕組を図１に示す正３角形トラスドームの分岐解析結果に基づき考察するものである。この考察に際し、藤井が導入した分岐モードの最大対称群の概念を参考にした（参考文献１）。

２。正３角形トラスドームの固有ベクトルの組成

参考文献２で提案した正多角形状構造物の分岐（変形）モード分類法より、正３角形トラスドームの変形モードは下記の４種類に分類できる、

D_3　　正３角形モード
C_3　　正３角形が周方向に回転したモード
D_1　　２等辺三角形モード
E　　非対称モード　　　　　（１）

図２にこれらのモードを示す。

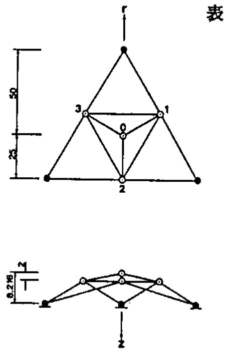

図１　正３角形トラスドーム

表１　固有ベクトルの対称性の分類

存在可能な空間の対称群のタイプ	径路のタイプ		
	D_3	D_1	E
D_3	3		
C_3	1		
D_1	4	7	
E	4	5	12

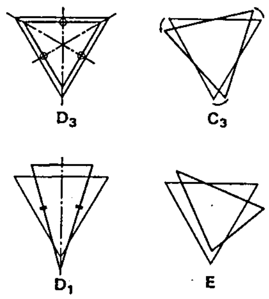

図２　正３角形トラスドームの変形モードの分類

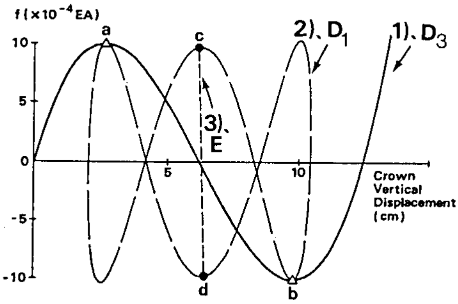

図３　外力－変位関係（釣合経路）

対称鉛直荷重に対して求めたこのドームの釣合経路を図３に示す。正３角形モードを持つ主経路１）から２等辺三角形モードを持つ分岐経路２）が分岐し、さらに、非対称なモードに対応する経路３）が分岐している。ところで、正３角形ドームは４つの自由節点を持つので、節点変位の総自由度は４×３＝１２になる。すなわち、このドームの接線剛性行列は１２個の固有値と固有ベクトルを持つことになる。この１２個の固有ベクトルを各経路上で求め、その対称性を式（１）で導入した４種類の分岐モードに従って分類し、表１に示した。このように、ドームが非対称に変形する経路３）上では全部の固有ベクトルが非対称モードＥになる。これに対し、正３角形のようにドームが変形する主経路１）上では４種類にモード全てが存在する。このことから分岐の進行にともない、固有ベクトルの対称性の低下が生じている事が分かる。

３。固有ベクトルの組成の求め方

１２個の節点変位を持つこの正３角形ドームの変形挙動は１２次元の実数空間$\mathbb{R}_{12}$により表わされる。こ

の時、式（１）の４種類のモードが張る空間はそれぞれ$\mathbb{R}_{12}$の部分空間になる。これらの空間をそれぞれ、D_3,max 、C_3,max 、D_1,max 、E,max と定義し、これらのモードの最大空間と呼ぶ。それぞれの変形モードの拘束度を調べることにより、これらの空間の次元はそれぞれ次式のように定まる。

$$\dim(D_3,\mathrm{max}) = 3 \qquad \dim(C_3,\mathrm{max}) = 4 \qquad \dim(D_1,\mathrm{max}) = 7 \qquad \dim(E,\mathrm{max}) = 12 \tag{2}$$

しかし、これらの空間は独立ではなく、図４に示すように重複した部分を持つ。例えば、正３角形モード D_3 は２等辺三角形モードD_1 の部分空間になっている。これは、正３角形が２等辺三角形の特殊な例であることに依っている。２等辺三角形モードであって、かつ正３角形でないモードが張る空間を２等辺三角形モードの最小空間D_1,min と定義する。他のモードの最小空間も同様に、C_3,min 、D_3,min 、E,min と定義する。図４に示す空間の包含関係より、最大空間と最小空間の次元の間には下記の関係が成立する。

$$\begin{aligned}
\dim(D_3,\mathrm{min}) &= \dim(D_3,\mathrm{max}) = 3\\
\dim(C_3,\mathrm{min}) + \dim(D_3,\mathrm{min}) &= \dim(C_3,\mathrm{max}) = 4\\
\dim(D_1,\mathrm{min}) \qquad\qquad + \dim(D_3,\mathrm{min}) &= \dim(D_1,\mathrm{max}) = 7\\
\dim(E,\mathrm{min}) + \dim(D_1,\mathrm{min}) + \dim(C_3,\mathrm{min}) + \dim(D_3,\mathrm{min}) &= \dim(E,\mathrm{max}) = 12
\end{aligned} \tag{3}$$

この連立方程式を解くと、

$$\dim(D_3,\mathrm{min}) = 3 \qquad \dim(C_3,\mathrm{min}) = 1 \qquad \dim(D_1,\mathrm{min}) = 4 \qquad \dim(E,\mathrm{min}) = 4 \tag{4}$$

と最小空間の次元が求まる。ここで求めた最小空間の次元の組成は表１に示す固有ベクトルの組成と完全に一致している。

分岐経路上の固有ベクトルの対称性の組成を求めるにあたり、次の仮説を導入する。「分岐経路ではその経路の対称性を表わすモードを部分空間として含むモードだけが残り、その他のモードは残ったモードのうち、そのモードを含むものに吸収される。」 この仮説に従うと、非対称に変形する経路上では、非対称モードＥ以外のモードは全て非対称モードに吸収されてしまい、１２次元の非対称モードだけからなる空間になる。また、２等辺三角形のように変形するモードD_1 の対称性を持つ経路では、このモードD_1 と、このモードを部分空間として持つ非対称モードＥだけが残る。モードD_3 はD_1 に含まれるので、D_1 に吸収されてしまう。同様に、モードC_3 はモードＥに吸収される。この結果、固有ベクトルの空間は図５に示すように著しく簡略化される。また、吸収された空間の持つ次元は吸収した空間の次元に足し合わされることになる。従って、D_1 の次元は４＋３＝７となり、C_3 の次元は１＋４＝５となる。この次元の組成は表１の固有値解析の結果と一致している。

このように、３角形トラスドームの分岐現象に伴う固有ベクトルの組成の変化は、次元の簡単な考察により説明できた。この考察を一般化することが今後の課題である。

参考文献 1) Hiroshi Fujii and Masaya Yamaguchi, Structure of Singularities and its Numerical Realization in Nonlinear Elasticity, Journal of Math. of Kyoto Uni.,20-3,1980.

2) Kiyohiro Ikeda and Kunio Torii, Group Theoretic Description of Bifurcation Behavior of Axisymmetric Regular-Polygonal Truss Domes, Proc. of JSCE, No. 386/I-8, Oct.1987.

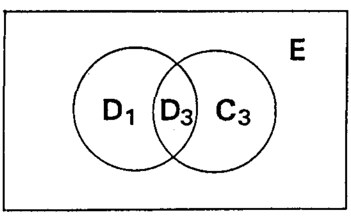

図４　空間の包含関係図（D_3 ）

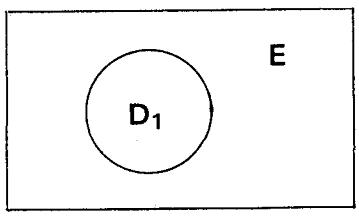

図５　空間の包含関係図（D_1 ）