

I-42

静水圧を受ける曲線直交リブ補剛円板の曲げ解析

北海道大学工学部 正会員 荻澤憲吉
北海道大学工学部 正会員 芳村 仁

1. まえがき

半径方向と円周方向に多数のリブによって補剛された円板が、その板面に対して垂直な方向からの荷重を受ける場合において、これまで対称曲げについて、各種の変剛度板との比較などから力学的性質の違いを明らかにしてきた。

今回は、円板に非対称な荷重が作用する場合について、その基礎方程式の解を示し、解析例として静水圧状の分布荷重が作用する曲線直交異方性補剛円板の解析について報告する。

2. 基礎方程式

リブで補剛された円板の曲げ変形だけを考えるものとして、板の曲げの中立面内に座標 r, θ をとり、その面と垂直に座標 z をとる。デッキプレートでは平面応力状態、補剛リブでは単軸応力状態として、曲げ変形の時に断面平面保持を仮定すると、曲げモーメント M_r, M_θ およびねじりモーメント $M_{r\theta}, M_{\theta r}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} - D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, & M_{r\theta} &= -\{(1-\nu)D + C_r\} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ M_\theta &= -D \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} - D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), & M_{\theta r} &= -\{(1-\nu)D + C_\theta\} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

ここで、これらのモーメント式には各曲げ剛性とねじり剛性が含まれていて、それぞれ、

D : デッキプレートの曲げ剛性、 D_r, D_θ : 半径方向および円周方向のリブ(のみ)の単位幅あたりの曲げ剛性、 C_r, C_θ : 半径方向および円周方向のリブ(のみ)の単位幅あたりのねじり剛性、である。

これらの剛性のうち、半径方向のリブ配置が放射状になるために、 D_r および C_r は半径 r に逆比例して変化し、剛性は外側にいくほど小さくなる。いま、円板の外縁 $r=a$ における半径方向リブによる曲げ剛性とねじり剛性を D_a および C_a とすると、

$$D_r = (a/r)D_a \quad C_r = (a/r)C_a$$

と表わされる。

これらの式を、分布荷重 p_z をになう板要素の曲げのつりあい条件に代入すると、補剛円板の曲げの基礎方程式は次のように誘導される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + h \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^4} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^5} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + g \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + g \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta} - (g + f_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (g + f_1) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \\ + (2g + f_2 h) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - (2g + f_2 h) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + (4g + 2f_1 + f_2 h) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + (g + f_1) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = p_z \frac{a^4}{D_a} \end{aligned}$$

ここで、半径 r のかわりに無次元座標 $\rho = r/a$ を導入してある。また、記号 f_1, f_2, g および h は剛比であり、次のように、外縁における半径方向リブの剛性を基準に定義してある。

$$f_1 = (D_\theta/D_a), \quad f_2 = (C_\theta/C_a), \quad g = (D/D_a), \quad h = (C_a/D_a)$$

3. 基礎方程式の解

荷重として、 $[p_z = q \rho \cos \theta]$ という形式の分布荷重を考え、基礎方程式の右辺に代入する。級数解の形として、 $\rho=1$ のまわりに展開した解を求めるために、まず微分方程式の係数 $(1/\rho), (1/\rho^2), \dots, (1/\rho^6)$ を $\rho=1$ においてTaylor展開した形に改めてから、級数解を誘導すると、最終的に、方程式の一般解は、余解 w_0 および特解 w_p の和として、次のような形式で得られる。

$$W = W_0 + W_p = \frac{qa^4}{D_a} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-p)^n \cos \theta + \sum_{n=4}^{\infty} P_n (1-p)^n \cos \theta \right\}$$

ここで、余解の項のうち、 A_0, A_1, A_2 および A_3 は任意に決められる定数である。それ以降の A_n ($n \geq 4$) は、順次前の項の係数によって決められる係数で、次のような式で与えられる。

$$A_n = \frac{-1}{(1+g)n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \{ (n-i-3) - 2g \} \\ -(n-i)(n-i-1) \{ \binom{i}{2} h + \binom{i-1}{1} S \} \\ -(n-i) \{ 2 \binom{i}{3} h + \binom{i-1}{2} S \} - \{ 2 \binom{i}{4} h + \binom{i-1}{3} S \} \end{array} \right] A_{n-i} \quad (n \geq 4)$$

また、 P_n ($n \geq 4$) は特解項の係数で、同様に次のようになる。

$$P_4 = \frac{1}{24(1+g)}, \quad P_n = \frac{-1}{(1+g)n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \{ (i+1)(n-i-3) + g(n-3-i-3) \} \\ -(n-i)(n-i-1) \{ \binom{i+1}{3} h + \binom{i}{2} S \} \\ -(n-i) \{ 2 \binom{i+1}{4} h + \binom{i}{3} S \} - \{ 2 \binom{i+1}{5} h + \binom{i}{4} S \} \end{array} \right] P_{n-i} \quad (n \geq 5)$$

ただし、これらの A_n および P_n 式において、 $S = 3g + f_1 + f_2 h$ であり、また、二項係数 $\binom{n}{r}$ において、 $n < r$ のときは $\binom{n}{r} = 0$ とする。

4. 解析結果

非対称載荷の例として、周辺単純支持された補剛円板に、静水圧状に分布する荷重が作用したときの解析を試みた（図1）。計算は、逆対称載荷と対称載荷に分解して行なわれ、ここに示した逆対称載荷の解を用いた解析結果と、対称曲げの時の解析結果の、両者を重ね合わせて断面力および変形を求めた。

数値計算は、級数の係数を20項目まで求めて行なったが、収束結果は良好であった。

解析結果のうち、図2に、直径AC軸に沿ったたわみ (w) と半径方向曲げモーメント ($r \cdot M_r$) の分布を示す。

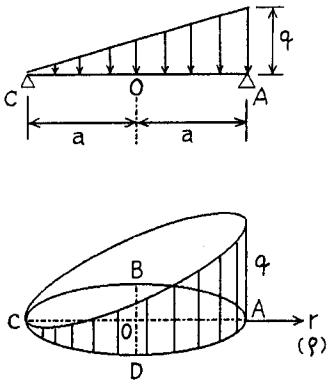


図1. 静水圧分布荷重を受ける
単純支持された補剛円板

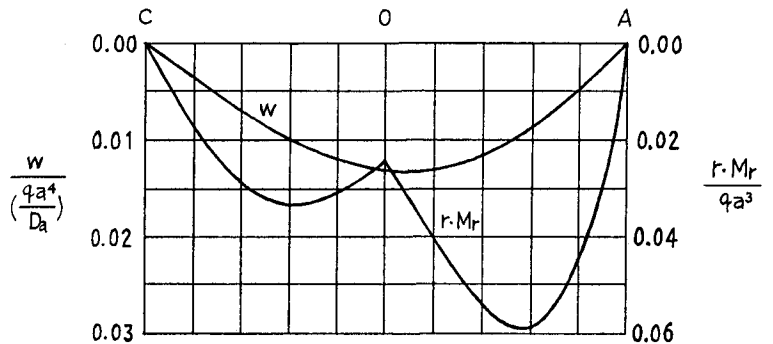


図2. 解析結果：直径AC軸のたわみ、曲げモーメントの分布
($f_1 = 1, f_2 = 1, g = 1, h = 0.1, \nu = 0.3$ の場合)

5. あとがき

非対称な曲げをうける補剛円板の基礎方程式を誘導し、その解を級数解のかたちで求めた。

その解を用いて、周辺単純支持された補剛円板に静水圧分布荷重が作用したときの解析を試み、良好に収束した解析結果を得た。

さらに、より複雑な荷重が作用する場合に対しても、円周方向に級数展開をすることによって、この解法で解析できるものとおもわれる。