I-40　流体―回転殻系の自由振動解析

北海道大学工学部　正員　三上　隆
北海道大学工学部　正員　芳村　仁
北海道開発局　正員　新目竜一

1．はじめに　シェルと流体が成す連成系の動的挙動の解明は，さまざまな工学分野において重要な問題であり，その中でも固有振動数の決定は，構造物の耐震および防振設計をする上での第一ステップである。本報告では，内部あるいは外部に流体が存在する回転殻の固有振動問題に対して，選点法に基づく手法を提示し，その適用可能性および有効性の検討を行う。

2．解析モデルと基礎方程式　図－1に示すように，液体高さHまで液体に接し，一様な厚さhの回転殻を考える。E，ν，ρ_sを殻の弾性係数，ポアソン比，密度とし，ρ_fを液体の密度とする。流体領域の座標系は，静止水面と殻の回転軸の交点を原点，鉛直下方にz軸をとる。液体運動は非圧縮，非粘性で渦無し流れと仮定し，殻の運動は変形が小さく，せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に従うものとする。さらに，流体と殻の連成系は，円周方向波数nおよび円振動数ωの調和振動をするものとする。

1) 流体の基礎方程式　殻の内部，外部流体の運動は速度ポテンシャルΦで表されるラプラス方程式（$\nabla^2\Phi=0$）で支配され，動圧力pは線形化ベルヌーイ式（$p=-\rho_f\Phi_{,t}$；以下コンマに続く下添字は偏微分を表す）により計算できる。さらに液面条件式（$p|_{z=0}=0$），液底条件式（$\Phi_{,z}|_{z=H}=0$），接触条件式（$\Phi_{,n}|_{r}=W_{,t}$；n＝殻表面の単位法線ベクトル，W＝殻の法線方向変位）および外部問題に対しては遠方条件式（$\Phi|_{r\to\infty}\to 0$）が与えられる。

2) 液体に接する回転殻の基礎方程式　殻と流体の接触条件を考慮することにより，流体との連成の影響を表す圧力による項が殻の運動方程式中に取り入れられ，次のように表される。

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2\left([F]\{X\}+\{P\}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここに$(\ )'=d(\ )/d\xi$，ξ（$=[0,1]$）は液体と殻の接触，非接触領域で独立に定義される経線方向座標，[C]～[F]は殻の諸元のみで表される行列[1]，$\Omega^2(=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega^2/E)$，$\{X\}^T=(u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_\theta)$，および$\{P\}^T=(0,\ 0,\ p_w,\ 0,\ 0)$である。$p_w$は上述の連成効果を表す圧力で，これは，液面および液底の条件を満足する速度ポテンシャルの一般解の形が，Strum-Liouville型の固有値問題の解として固有関数で展開できることより導かれるものである。なお，p_wは未知関数であるwの積分という形で与えられるので，式(1)は微積分方程式でもある。

3．定式化　式(1)の微分項はM次のshifted Legendre多項式の零点を選点とする選点法，p_wの積分項は選点の位置と補間型数値積分における分点を共有させることにして，Gauss-Legendre型積分則によって評価することにする。その結果，液体に接する殻の固有振動方程式は，選点における未知ベクトル$\{\delta_c\}$を固有ベクトルとする次式で表される[2]。

$$[\alpha]\{\delta_c\}=\Omega^2\left([M^s]+[M^f]\right)\{\delta_c\} \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここで，$[M^s]$は殻自体の慣性力の係数よりなるマトリックス，$[M^f]$は法線方向変位に対応する成分のみが非零な付加質量マトリックスである。

4．数値計算例　解析例として，固定支持された半球殻を考える。ただし，$\nu=0.3$，H（水深）/a（半径）＝0.5，$\rho_f/\rho_s=8.0$とした。なお，内部選点数，積分の分点数にはM＝11を採用し，フーリエ展開項数は12とした。表－1はh/a＝0.01の場合について，液体に接する領域の要素数Nの固有振動数

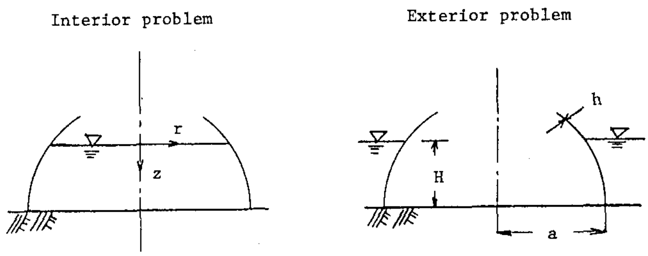
Ωに及ぼす影響を，円周方向波数n＝1，5の経線方向モード次数 m＝1～4についてみたものである。これによれば，要素分割数Nの解Ωに与える影響は少ない。表－２は，空の状態のモードを５項重ね合わせたRayleigh-Ritz解と本解析値（m＝1）を比較したものである。本解析値は，厳密解に対して上限値を与えるRayleigh-Ritz解よりも低めの値を与えている。図－２は種々のh／aに対するm＝1のΩ－n関係を示したものである。これによれば，波数n≧5になれば，内部・外部問題とも同じ解になることがわかる。

５．まとめ

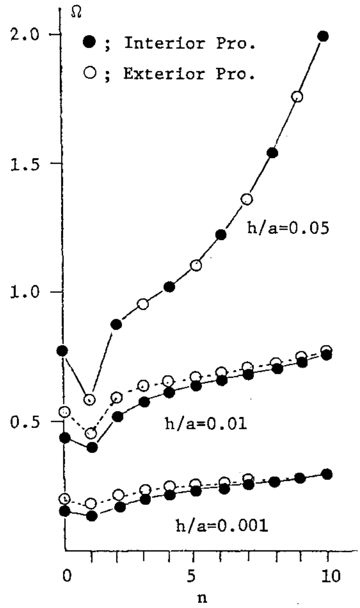
本報告は，液体－回転殻からなる連成自由振動問題に対する１つの近似解析法を提示し，その有効性を数値計算例を通して確かめたものである。

参考文献

1) 三上・芳村： 土木学会論文集，第374号／Ⅰ－6，pp.319-328，1986.
2) 三上・芳村： 構造工学論文集，Vol.34A，pp.785-796，1988.



図－１　解析モデル



図－２　１次固有振動数Ωとnの関係

表－１　固有値パラメータΩの収束性に及ぼす要素分割数Nの影響

(1) 内部問題

N	n＼m	1	2	3	4
1	1	0.395	0.670	0.784	0.943
2	1	0.395	0.670	0.786	0.943
1	5	0.640	0.810	0.994	1.040
2	5	0.639	0.810	0.995	1.041

(2) 外部問題

N	n＼m	1	2	3	4
1	1	0.455	0.702	0.793	0.943
2	1	0.455	0.703	0.793	0.943
1	5	0.668	0.812	0.995	1.039
2	5	0.668	0.812	0.995	1.040

表－２　Rayleigh-Ritz法との比較（m＝1のΩ）

円周方向波数	内部問題		外部問題	
n	本解析法	R－R法	本解析法	R－R法
1	0.395	0.398	0.455	0.456
2	0.522	0.535	0.602	0.606
3	0.576	0.591	0.635	0.640
4	0.612	0.619	0.653	0.655

本解析法：　液体に接する部分の要素分割数＝2
R－R法：　モード展開項数＝5