I-39　有限要素法による直交異方性板の変形解析

㈱　構造技研　○正　員　竹原寛幸
岩手大学工学部　正　員　岩崎正二
岩手大学工学部　正　員　宮本　裕
岩手大学教育学部　辻野哲司

1．まえがき

横荷重を受ける直交異方性板の線形曲げ及び幾何学的非線形曲げ問題を、変位法に基ずく有限要素法で解析した。用いた要素は長方形平板要素であり、曲げ変形に関してはGreeneの適合変位関数をもちいて解析的に剛性マトリックスを誘導した。

2．解析理論

図－1に示すような長方形平板要素に関して、線形曲げの剛性マトリックスの誘導過程のみを示す。なお、非線形曲げに関しては、参考文献2）を参照されたい。

弾性状態における直交異方性板のひずみエネルギーUは、

$$U=\frac{1}{2}\iiint\{D_x\varepsilon_x^2+(D_1+D_2)\varepsilon_x\varepsilon_y+D_y\varepsilon_y^2+D_{xy}\gamma_{xy}^2\}\,dx\,dy\,dz \tag{1}$$

ただし $D_x=\dfrac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}$ ，$D_y=\dfrac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}$ ，$D_1=\dfrac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y}$ ，$D_2=\dfrac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y}$ ，$D_{xy}=G_{xy}$　(2)

板の曲げによる線形理論では、x，y方向の縦ひずみ ε_x，ε_y 及びこれらの軸に関するせん断ひずみ γ_{xy} は、板の中央面の伸びを無視してつぎのように表わされる。

$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\quad \varepsilon_y=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\quad \gamma_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{3}$$

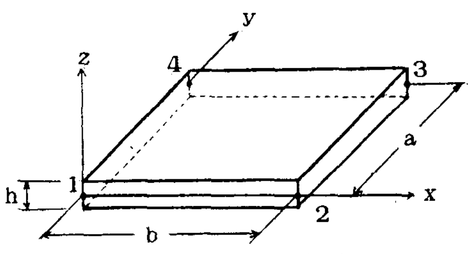
式（1）に式（3）を代入すると、

$$U=\frac{h^3}{24}\iint\{D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+4D_{xy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\}\,dx\,dy$$

変位関数は、Greeneによって提案されたものを用いる。この関数は、要素の各辺上でたわみ及び傾斜角の適合条件を完全に満たしており、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} w=\ &\phi_{1(\xi)}\phi_{1(\eta)}w_1+\phi_{1(\xi)}\phi_{3(\eta)}a\,\theta_{x1}+\phi_{3(\xi)}\phi_{1(\eta)}b\,\theta_{y1}\\ &+\phi_{2(\xi)}\phi_{1(\eta)}w_2+\phi_{2(\xi)}\phi_{3(\eta)}a\,\theta_{x2}+\phi_{4(\xi)}\phi_{1(\eta)}b\,\theta_{y2}\\ &+\phi_{2(\xi)}\phi_{2(\eta)}w_3+\phi_{2(\xi)}\phi_{4(\eta)}a\,\theta_{x3}+\phi_{4(\xi)}\phi_{2(\eta)}b\,\theta_{y3}\\ &+\phi_{1(\xi)}\phi_{2(\eta)}w_4+\phi_{1(\xi)}\phi_{4(\eta)}a\,\theta_{x4}+\phi_{3(\xi)}\phi_{2(\eta)}b\,\theta_{y4} \end{aligned} \tag{4}$$

$\xi=x/b$
$\eta=y/a$
$\phi_{1(s)}=1-3s^2+2s^3$
$\phi_{2(s)}=3s^2-2s^3$
$\phi_{3(s)}=s-2s^2+s^3$
$\phi_{4(s)}=-s^2+s^3$



図－1 長方形平板要素

ここで、$K\xi=\partial^2 w/\partial\xi^2$
$K\eta=\partial^2 w/\partial\eta^2$
$K\xi\eta=\partial^2 w/(\partial\xi\partial\eta)$ とおく。

以上により、P＝b／aとおくとUは次のようにあらわされる。

$$U=\frac{h^3}{24ab}\int_0^1\int_0^1(P^{-2}D_xK_\xi^2+2D_1K_\xi K_\eta+P^2D_yK_\eta^2+4D_{xy}K_{\xi\eta}^2)\,d\xi\,d\eta \tag{5}$$

節点変位は各節点におけるたわみとx軸およびy軸まわりの傾斜角であり、これに対応して節点力は各節点におけるせん断力とx軸およびy軸まわりの曲げモーメントであって、それぞれ次のように与えられる。

$\{\delta_b\}=\{w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1},\ w_2,\ \theta_{x2},\ \theta_{y2},\ w_3,\ \theta_{x3},\ \theta_{y3},\ w_4,\ \theta_{x4},\ \theta_{y4}\}^T$
$\{f_b\}=\{F_1,\ M_{x1},\ M_{y1},\ F_2,\ M_{x2},\ M_{y2},\ F_3,\ M_{x3},\ M_{y3},\ F_4,\ M_{x4},\ M_{y4}\}^T$
$\{f_b\}=[K_{ij}]\ \{\delta_b\}$　　($i,j=1,2,\ldots,12$　，^{T}は転置行列をあらわす)

一般に剛性マトリックスの要素には次の関係が成り立つ。

$$K_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_j}=\frac{\partial^2 U}{\partial q_j\,\partial q_i} \tag{6}$$

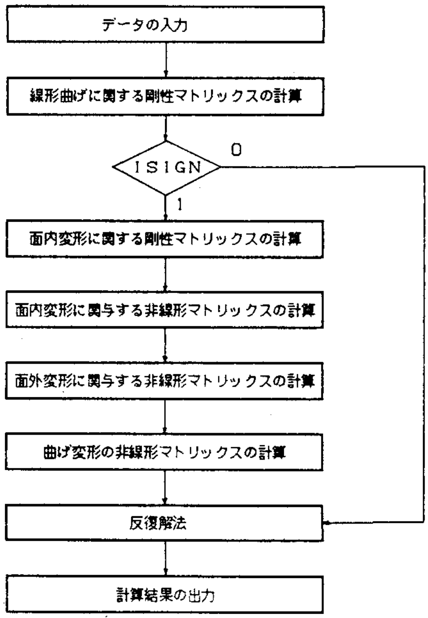
ここに、 $\{q_1,\ q_2,\ ...\ ,\ q_{12}\} = \{w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1},\ ...\ ,\ \theta_{y4}\}^T$

よって、マトリックス要素 K_{ij} は次のようになる。

$$K_{ij}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)=\frac{h^3}{12ab}\int_0^1\!\!\int_0^1\Big\{P^{-2}D_x\frac{\partial K_\xi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K_\eta}{\partial q_j}+D_1\left(\frac{\partial K_\xi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K_\eta}{\partial q_j}+\frac{\partial K_\xi}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial K_\eta}{\partial q_i}\right)$$
$$+P^2D_y\frac{\partial K_\xi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K_\eta}{\partial q_j}+4D_{xy}\frac{\partial K_{\xi\eta}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial K_{\xi\eta}}{\partial q_j}\Big\}\,d\xi\,d\eta \tag{7}$$

3．計算例

計算にもちいたプログラムのフローチャートは右記のとおりである。これは非線形計算もできるものである。表－1は等方性板（1/4モデル・36要素）の線形解析結果であり、グラフは直交異方性板（1/4モデル・16要素）の非線形解析結果である。（ただし、両結果とも板中央点でのたわみを示してある。）



①周辺固定中央集中荷重等方性板

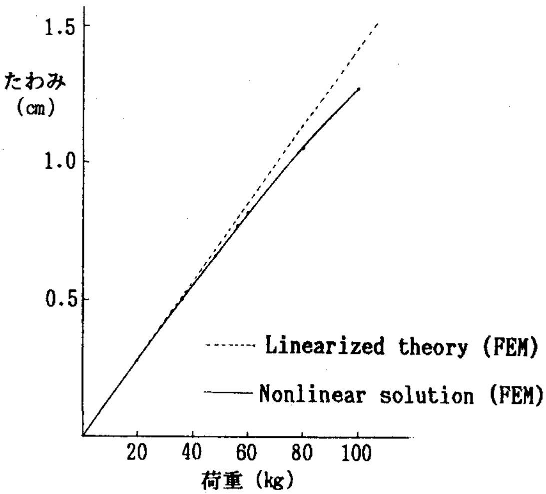
30cm×30cm×0.5cm　荷重P＝4kg

E=2100000kg/cm², ν=0.3

厳密解=8.38656E-4cm

要素数	たわみ(cm)	誤差(%)
4	7.85728 E-4	6.31
9	8.00750 〃	4.52
16	8.08201 〃	3.63
25	8.12294 〃	3.14
36	8.14785 〃	2.85
64	8.18381 〃	2.42
100	8.25946 〃	1.52

表－1



②二対辺単純支持二辺自由の直交異方性板（合板）

41cm×41cm×0.794cm

E_{xb}=74100kg/cm²

E_{yb}=28700kg/cm²

ν_{xb}=0.137

ν_{yb}=0.053

G_{xyb}=5230kg/cm²

E_{xm}=65600kg/cm²

E_{ym}=60600kg/cm²

ν_{xm}=0.189

ν_{ym}=0.175

G_{xym}=5230kg/cm²

【参考文献】

1）川井忠彦・吉村信敏著：有限要素法による平板の大たわみ問題の解析／生産研究20巻8号(1968.8)
2）辻野哲司著　：合板の大たわみ解析　／木材学会誌Vol.23,No.3(1977)