

長崎大学 正 員 崎山 毅
 長崎大学 ○正 員 松田 浩
 長崎大学 学生員 森田千尋

1. まえがき

橋軸と支承線とが直角でない斜橋などに用いられる斜板の曲げおよび自由振動などの諸問題は、これらを解析的に解くことは一般に困難であるため、種々の数値解析法により解析されている。しかしながら、斜板の数値解の安定性は、斜角が増大するにつれて悪くなり、各種の数値解法による数値解にも大きなばらつきがみられる。

本文は、斜交座標系に関して導かれた基礎微分方程式の離散解にもとづく、斜板の曲げおよび振動の解析法について考察したもので、変位関数を仮定する必要のない、また、任意の境界条件を持つ斜板を比較的簡単に解析できる一解析法を提示し、既往の研究結果との比較により、提示した解析法の実用性を検討したものである。

2. 斜板の基礎微分方程式

図1に示すような斜交座標系を考え、その斜交座標系に対する斜板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすれば、せん断変形の影響を考慮したMindlin理論に基づく変厚板を含む斜板の曲げおよび自由振動の基礎微分方程式は式(1)のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cos \alpha + q \cos \alpha &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \theta_y / \partial y \\ \partial \theta_x / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial x + \partial \theta_x / \partial y \end{Bmatrix} &= \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_y + \partial w / \partial y \\ \theta_x + \partial w / \partial x \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\kappa G h} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $q=q(x,y)$:横荷重強度、 E :弾性係数、 $G=E/2(1+\nu)$:せん断弾性係数、 ν :ポアソン比、 $h=h(x,y)$:板厚、 $D=D(x,y)=Eh^3/12(1-\nu^2)$:板剛度、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、 $a_{11}=1/C^3$ 、 $a_{12}=(t_1^2+\nu)/C$ 、 $a_{13}=-t_1/C^2$ 、 $a_{22}=1/C^3$ 、 $a_{23}=-t_1/C^2$ 、 $a_{33}=(1+S^2-C^2)/2C^3$ 、 $a_{56}=-t_1$ 、 $a_{55}=a_{66}=1/C$ 、 $a_{ij}=a_{ji}(i \neq j)$ 、 $C=\cos \alpha$ 、 $S=\sin \alpha$ 、 $t_1=S/C$ 、 ρ :密度、 t :時間、 ω :固有角振動数
 次の無次元量:

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0(1-\nu^2)], X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu^2)], X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_5 &= a M_x / [D_0(1-\nu^2)], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, \eta = x/a, \zeta = y/b, a, b: \text{矩形板の縦横の辺長}, \\ \mu &= b/a, h_0: \text{基準板厚}, \bar{q} = \mu q_0 a^3 / [D_0(1-\nu^2)] [q(x,y)/q_0], q_0: \text{基準荷重強度}, K = E h_0^3 / (12 \kappa G h), \\ I &= I(x,y) = \mu(1-\nu^2) [h_0/h(x,y)], D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]: \text{基準板剛度}, \lambda^2 = a^2 \omega (\rho h / D_0)^{1/2} \end{aligned}$$

を用いて無次元化後、微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより任意の離散点 (i,j) における離散解 X_{pij} ($p=1 \sim 8$)は次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} X_{s0l} \right) + q_{pij} \quad (2)$$

ここに、 X_{rk0}, X_{s0l} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、係数 $a_{pijkd}, b_{pijld}, q_{pij}$ は伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。

3. 数値計算例

数値計算する場合の積分定数と境界条件を4辺固定斜板について図2に示す。なお、本文では4辺固定および対辺単純支持他对辺固定支持を、各々,CCCC,SCSCと表す。

まず、本法による斜板の曲げの数値解の収束性および精度を検討するために既往の近似解法による解析結果との比較を行った。表1にCCCC斜板の中央点のたわみおよび主モーメントについて、また、

表2にはSCSC斜板の中央点のたわみについて示している。たわみに関しては8~12の比較的分割数で精度のよい結果が得られている。

図4は、図3に示すようなx方向にのみ直線的に変化するCCCCおよびSCSCなる支持条件を持つ変厚斜板の自由振動の基本振動数についての解析結果を示したものである。なお、同図には $m=4, 6$ 分割の解析結果の外挿値を示している。

参考文献

- (1)Timoshenko:Theory of Plates and Shells,
- (2)太田他：一様分布荷重を受ける周辺固定ひし形板の静的たわみ, 機械論集118号, (3)Iyenger & Srinivasan:Clamped skew plates under uniformly distributed load, J.Royal Aeronautical Soc., 71,(4)Morley:Skew Plates and Structures, (5)T. Mizusawa & T. Kajita:Analysis of skew plates in bending using B-spline function, Mem. of Daido Institute of Technology, Vol.14

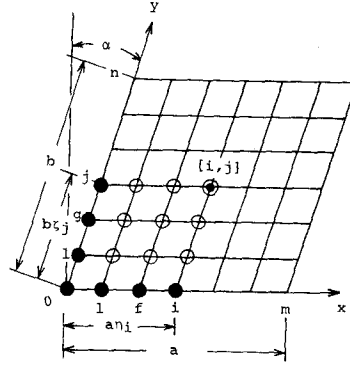


図1 離散点

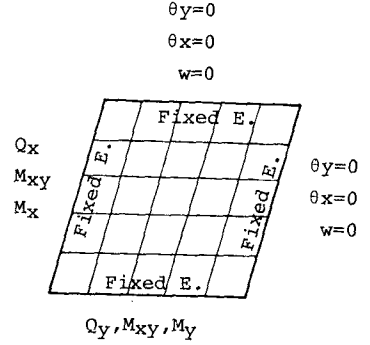


図2 積分定数と境界条件

表1 C C C C斜板の主モーメントおよびたわみ(中央点)

斜角	m	M_{max}/qa^2		M_{min}/qa^2		$w/qa^4/D$	
		本 法	比較解	本 法	比較解	本 法	比較解
0°	4	0.0271		0.0271		0.00131	
	8	0.0248		0.0248		0.00127	
	12	0.0238		0.0238		0.00127	
15°	4	0.0474		0.0135		0.00114	
	8	0.0267		0.0194		0.00113	
	12	0.0245		0.0201		0.00113	
30°	4	0.0585		0.0108		0.000749	
	8	0.0264		0.0138		0.000777	
	12	0.0228		0.0146		0.000773	
45°	4	0.0503		0.0111		0.000336	
	8	0.0254		0.0110		0.000382	
	12	0.0194		0.0116		0.000381	

(斜角(度): α , m :分割数($m=n$), $\nu=0.3$, $\mu=1.0$, $h/a=0.01$)

表2 S C S C斜板の中央点のたわみ

m	0°	15°	30°	45°
4	0.0116	0.0102	0.00689	0.00304
6	0.0124	0.0110	0.00739	0.00354
8	0.0127	0.0112	0.00763	0.00373
比較解	0.0131 ⁽¹⁾		0.00789 ⁽³⁾	0.00384 ⁽³⁾

(斜角: α , m :分割数, $\nu=0.3$, $\mu=1.0$, $h/a=0.01$)

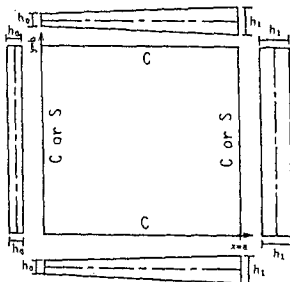


図3 変厚板

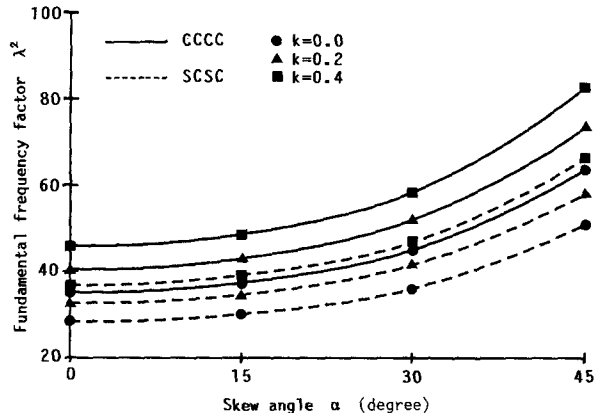


図4 変厚板の基本振動数