

I-37

離散 Kirchhoff 帯板要素の一般的定式化

トビー工業 (株) 正会員 藤井政美
長岡技術科学大学 正会員 林 正

1. まえがき

先に、写像変換の手法を用いて任意形状の薄板の曲げ解析に適用できるサブパラメトリック帯板要素を開発した。文献1)では、親要素に厚板要素を用いて写像変換した要素の平衡方程式を求め、これを薄板の曲げ解析に適用するために Kirchhoff の拘束条件を課して中間節線などの内部自由度を消去し、離散 Kirchhoff 要素として定式化した。この手法では、拘束条件を課す前の親要素の平衡方程式の次元数は内部自由度を含めた親要素の自由度数に等しい。また、内部自由度の消去には、行列演算による縮約の手法を用いた。

本報告では、Kirchhoff の拘束条件を親要素の変位関数に課して、数値計算を行う前に解析的に要素の内部自由度を消去し、この縮約された変位関数を用いて要素の平衡方程式を求める。したがって、方程式の次元数は薄板の曲げ解析に用いられる通常の低次帯板要素の自由度数に等しいので、最低次の次元数で数値計算を行うことができる。このような定式化によって計算時間はかなり短縮される。

2. 縮約変位関数

(1) 親要素 : 写像変換する前の親要素には長方形の厚板要素を用いて図-1のように要素座標として正規座標系 (ξ, η) を定める。

中央面上のたわみ w と ξ 軸まわりの回転角 θ を独立な変位関数に選び、それぞれを中間節線を含む3本の節線 i, j, k での一般化変位 w_{im}, θ_{im} ($i = i, j, k$; m : 級数番号)と節線に関係しない内部自由度

(bubble mode) w_{bm}, θ_{bm} で表すことにすれば変位関数は次式で与えられる。 図-1 親要素

$$w = \sum_m X_m (f_i w_{im} + f_j w_{jm} + f_k w_{km} + f_b w_{bm}), \quad \theta = \sum_m X_m (f_i \theta_{im} + f_j \theta_{jm} + f_k \theta_{km} + f_b \theta_{bm}) \quad (1)$$

$$\text{ここに、} f_i(\eta) = \eta(\eta+1)/2, \quad f_j(\eta) = \eta(\eta-1)/2, \quad f_k(\eta) = 1-\eta^2, \quad f_b(\eta) = \eta(1-\eta^2) \quad (2)$$

また、 $X_m(\xi)$ は w, θ を ξ 軸方向に級数展開するための形状関数である¹⁾。

変位関数が式(1)で与えられる帯板要素を8自由度要素と呼ぶことにし、文献1)で用いたように θ_{bm} を省いた7自由度要素及び w_{bm}, θ_{bm} をた省いた6自由度要素についても検討する。

図-1の要素を任意の形状に変換するために全体座標系としてデカルト座標系 (x, y) を用いれば、変換された曲線座標系 (ξ, η) と $x-y$ 座標系との微分関係はヤコビ行列 J で与えられる³⁾。

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

(2) 拘束条件式 : Kirchhoff の拘束条件式として次式を用いる¹⁾。

$$\partial w / \partial \eta - J_2 \theta = 0 \quad (4) \quad J_2 = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2} \quad (5)$$

式(4)に式(1)を代入して、各級数ごとに拘束条件を課すものとする。このとき、離散化の方法として文献1)と同じ手法を用いると次式が得られる。

$$g_{k0} w_{km} + g_{b0} w_{bm} - F_0 (f_k \theta_{km} + f_b \theta_{bm}) = -g_{i0} w_{im} - g_{j0} w_{jm} + F_0 (f_i \theta_{im} + f_j \theta_{jm}) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \begin{cases} \int_{-1}^1 J_{10} J_{30} d\xi / \int_{-1}^1 J_{30} d\xi & (\text{線拘束}) \\ F_0 = \{ (J_{10}^2 + J_{30}^2) / 2 \} & (\text{点拘束}) \end{cases} \quad (7) \quad g_i = df_i / d\eta \quad (i=i, j, k, b) \quad (8)$$

$$J_2 = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2} \quad (9)$$

上記の式において添字 0 は $\eta = \eta_0$ を、上付符号 $\pm$ は $\xi = \pm \xi_0$ を代入した値を意味する。線拘束は式(4)を $\eta = \eta_0$ の線に沿って課したものであり、点拘束は2点 $(\pm \xi_0, \eta_0)$ で平均的に課したものである¹⁾。

(3) 8自由度要素 : 8自由度要素を基本として縮約された変位関数を求める。式(6)を用いて左辺の4個の自由度を消去するために、 $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ と ± 1 で4本の式を立てる。点拘束の場合には ξ_0 に適当な値(例えば、 $\pm 1/\sqrt{3}$)を用いるものとする。これより次式が得られる。

$$4 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -F_{12} & -F_{21}/\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 & -F_{21} & -F_{12}/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{km} \\ w_{bm} \\ \theta_{km} \\ \theta_{bm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6 & 6 & F_{12} + \sqrt{3} F_{21} & F_{12} - \sqrt{3} F_{21} \\ -4\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & F_{21} + \sqrt{3} F_{12} & F_{21} - \sqrt{3} F_{12} \\ -1 & 1 & F_3 & F_4 \\ -2 & -2 & F_3 & -F_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{im} \\ \theta_{jm} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{ここに、} F_{12} = F_1 + F_2, \quad F_{21} = F_1 - F_2 \quad (11)$$

F_1 、 F_2 は $\eta_0 = 1/\sqrt{3}$ 、 $-1/\sqrt{3}$ を、 F_3 、 F_4 は $\eta = 1, -1$ を式(7)に代入した値である。式を簡潔に示すために、式(10)の第1、2式は $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ 、第3、4式は $\eta_0 = \pm 1$ の式の和と差をとって変形した。

式(10)を解いて求めた左辺の自由度を式(1)に代入すると、縮約された変位関数として、通常の低次要素の式と同じ形の次式が得られる。なお、式(14)は正規座標 η で表したエルミートの3次多項式である。

$$w = \sum_m X_m (H_1 w_{2m} + H_2 \theta_{2m} + H_3 w_{jm} + H_4 \theta_{jm}), \quad \theta = \sum_m X_m (G_1 w_{2m} + G_2 \theta_{2m} + G_3 w_{jm} + G_4 \theta_{jm}) \quad (12)$$

$$\text{ここに、} H_1 = f_1, H_2 = F_3 f_2, H_3 = 3 \left(\frac{f_5}{F_1} + \frac{f_7}{F_2} \right) = -G_3, G_2 = f_6 + \sqrt{3} F_3 \left(\frac{f_5}{F_1} - \frac{f_7}{F_2} \right), G_4 = f_8 - \sqrt{3} F_4 \left(\frac{f_5}{F_1} - \frac{f_7}{F_2} \right) \quad (13)$$

$$H_3 = f_3, H_4 = F_4 f_4, f_1 = (1+\eta)^2(2-\eta)/4, f_2 = -(1+\eta)^2(1-\eta)/4, f_3 = (1-\eta)^2(2+\eta)/4, f_4 = (1-\eta)^2(1+\eta)/4 \quad (14)$$

$$f_5 = (1+\sqrt{3}\eta)(1-\eta^2)/8, f_6 = (1+\eta)(3\eta^2-1)/4, f_7 = (1-\sqrt{3}\eta)(1-\eta^2)/8, f_8 = (1-\eta)(3\eta^2-1)/4 \quad (15)$$

(4) 7自由度要素 : 7自由度要素では θ_{bm} を省略し、拘束条件式として $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ の2本の式と、 ± 1 の式をたし合わせて1本にした式を用いる。したがって、式(10)の4行目を省略して解を求め、これを式(1)に代入して整理すると式(12)と同じ形の縮約された変位関数が求められる。

(5) 6自由度要素 : 内部自由度 w_{bm} 、 θ_{bm} を省いて $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ の拘束条件式を用いると、同様の方法で6自由度要素の縮約された変位関数を求めることができる。

3. 平衡方程式

(1) ひずみ成分 : 式(12)の変位関数を次式のように表す。

$$w = \sum_m X_m f_1^T d_m, \quad \theta = \sum_m X_m f_2^T d_m \quad (16)$$

$$\text{ここに、} d_m = \{w_{2m}, \theta_{2m}, w_{jm}, \theta_{jm}\}^T, f_1 = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}^T, f_2 = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}^T \quad (17)$$

薄板解析におけるひずみ ϵ は、式(4)の Kirchhoff の仮定に式(16)を用いると、ひずみマトリックスを B_m 、ひずみの変換行列を C として次式で与えられる¹⁾。なお、プライム記号は ξ に関する微分を表す。

$$\epsilon = -z[C] \sum_m [B_m] d_m \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} g_i &= df_i/d\xi \quad (i=1, 2) \\ K_3 &= \partial J_7/\partial \xi, \quad K_7 = \partial J_7/\partial \eta \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$B_m = \begin{Bmatrix} X_m'' f_1^T \\ X_m \{J_7 g_2^T + K_7 f_2^T\} \\ 2(J_7 X_m' + K_3 X_m) f_2^T \end{Bmatrix} - [G] \begin{Bmatrix} X_m' f_1^T \\ J_7 X_m f_2^T \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$C = \begin{Bmatrix} I_{11}^2 & I_{12}^2 & I_{11} I_{12} \\ I_{21}^2 & I_{22}^2 & I_{21} I_{22} \\ 2I_{11} I_{21} & 2I_{12} I_{22} & I_{11} I_{22} + I_{12} I_{21} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

(2) 剛性行列 : 級数項 m 、 n に対する帯板要素の剛性行列は次式のようにになる。

$$k_{mn} = D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_m^T \bar{D} B_n |J| d\xi d\eta \quad (23)$$

$$\bar{D} = \begin{Bmatrix} A^2 & C^2 + \nu I^2 & AC \\ B^2 & BC \\ \text{sym.} & C^2 + \lambda I^2 \end{Bmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} A &= I_{11}^2 + I_{21}^2, \quad C = I_{11} I_{12} + I_{21} I_{22} \\ B &= I_{12}^2 + I_{22}^2, \quad I = I_{11} I_{22} - I_{12} I_{21} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(3) 平衡方程式 : 帯板要素の平衡方程式は、通常の有限帯板法の式と同一の形で表される。すなわち、 q_m を式(17)の d_m に対応する一般化力、 p_m を表面力 q に対する荷重ベクトルとすると、

$$\sum_n [k_{mn}] d_n = q_m + p_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (26)$$

$$p_m = \int_A g X_m f_1^T |J| d\xi d\eta \quad (27)$$

4. あとがき 本解析法は従来の帯板要素を包含するものであり、縮約変位関数を考案したことにより、通常の有限帯板法とほぼ同じ計算手順で任意形状の薄板の曲げ解析を行うことができる。

1) 林 正・坂田 敦・西谷雅弘：サブパラメトリック帯板要素による薄板の曲げ解析，(投稿中)。